

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

25. Band, Heft 2

8. November 1941

S. 49—96

Analysis.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Scorza-Dragoni, G.: A proposito di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie. Rend. semin. mat. Univ. Padova 10, 90—100 (1939).

S. Cinquini (dies. Zbl. 21, 403) und G. Zwirner (dies. Zbl. 23, 226) haben die Existenz einer samt ihrer Ableitung absolut stetigen Lösungsfunktion $y(x)$ der Gleichung

$$(1) \quad y(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u)) du + \\ + \frac{1}{b-a} \left\{ \int_a^b dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u)) du - \beta \right\} (a-x) + (b-x) \alpha$$

untersucht unter den Voraussetzungen, daß 1. $f(x, y, y')$ bezüglich y, y' stetig und bezüglich x im Gebiet

$$C: a \leq x \leq b, \quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x), \quad |y'| < +\infty$$

meßbar ist, 2. in C die Ungleichung $|f(x, y, y')| \leq \varphi(y) \omega(y')$ gilt, in der $\varphi(y) \geq 0$ und in jedem beschränkten Intervall summierbar ist, $\omega(u)$ stets positiv und stetig ist und die Beziehungen

$$\int_0^{-\infty} \frac{u}{\omega(u)} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\omega(u)} du = +\infty$$

erfüllt, 3. aus $|y'| \leq h$ eine Ungleichung $|f(x, y, y')| \leq \psi_h(x)$ folgt, in der $\psi_h(x)$ nicht negativ und im Intervall (a, b) summierbar ist, im übrigen aber von h abhängt. — Der Existenzbeweis wird von G. Zwirner erbracht, falls $f(x, y, y')$ in jedem beschränkten Gebiet von C beschränkt ist und von S. Cinquini unter der Annahme, daß $f(x, \sigma(x), \sigma'(x)), f(x, \tau(x), \tau'(x))$ im Intervall (a, b) verschwinden. — Verf. zeigt nun, indem er sich auf Schlußweisen aus seinen vorangehenden Arbeiten und auf ein Lemma von L. Tonelli (dies. Zbl. 20, 123) stützt, daß für die Gleichung (1) ein Existenzsatz gilt, falls die Funktionen $\sigma(x)$ und $\tau(x)$ in (a, b) stetige Ableitungen besitzen und die Größen

$$\sigma'(x) - \int_a^x f(u, \sigma(u), \sigma'(u)) du, \quad \int_a^x f(u, \tau(u), \tau'(u)) du - \tau'(x)$$

im gleichen Intervall nicht abnehmen.

Giovanni Sansone (Firenze).

Loonstra, F.: Die Lösung von Differentialgleichungen in einem bewerteten Körper. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 409—419 (1941).

Mittels der Majorantenmethode wird bewiesen, daß eine Differentialgleichung $y' = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu} (x - x_0)^\mu (y - y_0)^\nu$ in einem vollständigen, bewerteten Körper von der Charakteristik Null stets eine Lösung besitzt, die sich wieder in eine Potenzreihe nach $x - x_0$ entwickeln läßt. Derselbe Satz gilt für Systeme $y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Hängt f_k noch analytisch von Parametern α ab, so hängt auch die Lösung analytisch von den Parametern und den Anfangswerten ab. Schließlich wird der Beweis auf partielle Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$$

mit den Anfangswerten $z = \varphi(x_2, \dots, x_n)$ für $x_1 = 0$ übertragen.

van der Waerden.

Infeld, L.: On a new treatment of some eigenvalue problems. *Phys. Rev.*, II. s. 59, 737—747 (1941).

Für den Fall, daß die Differentialgleichung

$$u'' + r(x, m)u + \lambda u = 0 \quad (m = 0, 1, 2 \dots)$$

in die Form

$$\left[k(x, m) - \frac{d}{dx} \right] \left[k(x, m) + \frac{d}{dx} \right] u = [\lambda - L(m)]u$$

gebracht werden kann und L eine monoton zunehmende Funktion von m ist, kann für jedes m die Eigenfunktion zu einem der Eigenwerte durch eine Quadratur gewonnen werden; die anderen Eigenfunktionen können aus einer einfachen Rekursionsformel berechnet werden. Die angegebene Zerlegbarkeit ist an eine besondere Bedingung geknüpft. Sie ist durchführbar bei der Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen, der Schrödingergleichung des gewöhnlichen Keplerproblems, beim Keplerproblem der Diracschen Wellengleichung und beim Keplerproblem im sphärischen Raum, sowie beim harmonischen Oszillator. Die Methode ist eng verwandt mit einer von Schrödinger angegebenen (dies. Zbl. 23, 86). *F. Hund (Leipzig).*

Leemans, J.: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. *Mathesis* 54, 152—155 (1940).

Verf. schreibt die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_k und mit dem zweiten Glied $\varphi(x)$ symbolisch

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = f(D) y = (D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_n) y = \varphi(x).$$

Er setzt (1) $(D - r_2) \dots (D - r_n) y = z_1$ und erhält die Gleichung $(D - r_1) z_1 = \varphi(x)$, deren Lösung z_1 er bestimmt und in (1) einsetzt. Indem er so fortsetzt, bekommt er die allgemeine Lösung y . Dieser Vorgang wird modifiziert, wenn $\varphi(x) = e^{\alpha x} P(x)$ oder $\varphi(x) = f(D) P(D) \psi(x)$ ist, wo P ein Polynom in x , $P(D)$ ein Polynom in D mit positiven und negativen Exponenten und α eine Konstante bedeuten. *Rádl (Prag).*

Ascoli, Guido: Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si riconnettono. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat.* 1, 189—215 (1940).

Verf. beweist kurz, daß ein vorgegebener linearer Differentialoperator n -ter Ordnung $L = \sum_{r=0}^n p_r(t) D^{n-r}$, ($D = d/dt$), der als regulär vorausgesetzt wird, d. h. derart, daß die $p_r(t)$ in (a, b) reelle oder komplexe stetige Funktionen sind und daselbst $p_0(t) \neq 0$ ist, in (a, b) eine Faktorenzerlegung der Form

$$L = p_0(D - \eta_n)(D - \eta_{n-1}) \dots (D - \eta_1)$$

sogar auf unendlich viele Arten gestattet, worin die η_r in (a, b) samt ihren ersten $n - r$ Ableitungen stetig sind. Unter Heranziehung geometrischer Betrachtungen in Überräumen beweist Verf., ebenfalls auf einfache Weise, den folgenden Satz von G. Mammana (dies. Zbl. 1, 15): Vorausgesetzt, daß die $p_r(t)$ in (a, b) reell seien, läßt der reelle Operator L dann und nur dann eine Zerlegung in reelle Linearfaktoren zu, falls jede Lösung der Gleichung $Ly = 0$ in (a, b) höchstens $n - 1$ Mal verschwindet, wobei jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit zu berücksichtigen ist. — Weiterhin befaßt sich Verf. mit einigen von G. Mammana angeschnittenen Fragen und kennzeichnet mittels einer durchsichtigen geometrischen Deutung diejenigen Funktionen und Funktionsgruppen, die Lösungen derselben regulären Differentialgleichung sind.

Giovanni Sansone (Firenze).

Lusin, N.: Un cas du théorème de Janet-Riquier. 1. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 31, 5—8 (1941).

Untersuchungen über das System S von Differentialgleichungen $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, \dots, n$), wobei die x_i unbekannte Funktionen einer unabhängig Veränderlichen t , die a_{ij} Polynome zweiten Grades in $\frac{d}{dt}$ mit konstanten Koeffizienten und die b_i gegebene Funktionen von t bedeuten. Verf. beweist, daß das System S auf

die Janet-Riquiersche Normalform Ω gebracht werden kann, vorausgesetzt, daß es eine Lösung besitzt und dieselbe nur von einer endlichen Anzahl von Konstanten abhängt. Daraus folgt die Möglichkeit einer beliebigen Wahl der Anfangswerte von x_i und $\frac{dx_i}{dt}$ oder nur von x_i allein, je nachdem die zweite oder nur die erste Ableitung von x_i in Ω wirklich vorkommt. Die Methode des Verf. dürfte sich wohl auch bei Untersuchungen über allgemeinere Systeme von Differentialgleichungen als nützlich erweisen.

O. Borůvka (Brünn).

Picone, Mauro: Teoremi di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie e loro conseguenze. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 20, 67—103 (1941).

Unter den allgemeinen Voraussetzungen von Carathéodory stellt Verf. einige Vergleichskriterien für gewöhnliche Differentialgleichungen und Systeme solcher Gleichungen auf. Ein besonders einfaches Kriterium, das bekannte Sätze von G. Peano, G. Scorza-Dragoni, S. Cinquini und dem Verf. bezüglich der Gleichungen erster und zweiter Ordnung verallgemeinert, betrifft die Gleichungen

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}), \quad z^{(p)} = g(x, z, z', \dots, z^{(p-1)}),$$

wo g bezüglich der Argumente $z, z', \dots, z^{(p-1)}$ nicht abnehmend ist und

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(p-1)}(x)) \leq g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(p-1)}(x))$$

gilt. Für Systeme von p Gleichungen

$$y'_h = \varphi_h(x) + \sum_{k=1}^p \varphi_{h,k}(x) y_k, \quad (h = 1, \dots, p)$$

in denen $\varphi_{h,k}(x) \geq 0$ ($h \neq k$; $h, k = 1, \dots, p$) ist, beweist Verf., daß von den p unbekannten Funktionen $p-1$ ihrem Werte nach in einem Punkte willkürlich vorgeschrieben werden können, während der Wert der p -ten Funktion in einem anderen Punkte vorgegeben wird. Der Fall der Gleichungen vierter Ordnung wird besonders vertieft. Verf. untersucht auch den Fall, daß einige der den unbekannten Funktionen vorgeschriebenen Bedingungen in Integralform gegeben sind. Schließlich beweist Verf. einen interessanten Existenzsatz im Großen für die Systeme

$$y'_h = f_h(x, y_1, y_2, \dots, y_h, \lambda), \quad y_h(a) = \alpha_h(\lambda) \quad (h = 1, \dots, p)$$

bezüglich eines sowohl in den Gleichungen als auch in den Anfangsbedingungen erhaltenen Parameters λ .

Giovanni Sansone (Firenze).

Burdette, A. C.: On a local solution of a differential equation of infinite order. Amer. J. Math. 63, 291—294 (1941).

Verf. verschärft einige Ergebnisse von I. M. Sheffer (dies. Zbl. 18, 136), die sich auf die Differentialgleichung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x) = \Phi(x)$ mit konstanten a_k und einer in der Umgebung des Nullpunktes analytischen Funktion $\Phi(x)$ beziehen, wobei er sich allerdings auf wesentlich stärkere Voraussetzungen als Sheffer stützt.

C. Miranda.

Cohn, Richard: On the analogue for differential equations of the Hilbert-Netto theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 268—270 (1941).

Ritt (dies. Zbl. 5, 394) bewies folgendes Theorem, welches dem bekannten algebraischen Hilbertschen Theorem entspricht: Es sei ein endliches System von Differentialpolynomen F_1, \dots, F_r in den Unbekannten y_1, \dots, y_n gegeben; wenn jede gemeinsame Lösung dieses Systems ein Differentialpolynom G annulliert, dann ist eine ganze Potenz G^p eine lineare Kombination der Polynome F_i und ihrer Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung. Der Beweis von Ritt erfolgt indirekt, so daß der Exponent p nach diesem Vorgang nicht berechnet werden kann. Verf. gibt einen direkten Beweis dieses Theorems an, nach welchem der Ausdruck G^p mit einem bestimmten Exponenten p durch endlich viele Schritte berechnet werden kann.

Rádl (Prag).

John, Fritz: Discontinuous convex solutions of difference equations. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 275—281 (1941).

Eine Funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$, wird konvex in (a, b) genannt, wenn für jedes

x, y von (a, b)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

gilt. — Wie bekannt, existieren konvexe, in jedem Intervall unstetige Funktionen. Verf. beweist u. a. die beiden folgenden Sätze: I. Wenn die Differenzengleichung

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n a_k f(x+k) = g(x)$$

eine stetige konvexe Lösung hat, und wenn die Gleichung $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$ wenigstens

eine positive, reelle Wurzel besitzt, dann hat (*) auch unstetige Lösungen. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn $g(x) \equiv 0$ ist. II. Wenn $g(x)$ in jedem endlichen Intervall

nach oben beschränkt, $a_n > 0$ ist und die Gleichung $\sum_{k=0}^n a_n x^k = 0$ keine positiven

reellen Wurzeln besitzt, dann hat (*) keine unstetigen konvexen Lösungen. *L. Cesari.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● Miller, F. H.: Partial differential equations. New York: Wiley 1941. 259 pag. \$ 3.00.

Saltykow, N.: Problèmes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Bull. Soc. Math. France 68, 134—157 (1940).

Der Verf. beginnt mit einem Überblick über die Theorie der partiellen Diff. Gl. 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion, soweit es sich um die Zeit nach Jacobi handelt. Nach seiner Auffassung ist einerseits eine französische Schule zu unterscheiden: J. Liouville, J. Bertrand und E. Bour, andererseits eine germanische, gekennzeichnet durch S. Lie und A. Mayer. Er findet, daß in beiden das „élément intégrable“, wie er es nennt, eine große Rolle spielt. In der Lieschen Ausdrucksweise wird ein solches élément int. einer Gleichung $F(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) = 0$, die die unbekannte Funktion nicht enthält, bestimmt durch eine Anzahl Lösungen $f_1, \dots, f_{n+\varrho-1}$ der linearen Gleichung $(Ff) = 0$. — Dabei ist $n-1 < n+\varrho-1 < 2n-2$, und die Gleichungen $F = \text{const.}$, $f_1 = \text{const.}$, \dots , $f_{n+\varrho-1} = \text{const.}$ machen den Ausdruck $\sum p_i dx_i$ zu einem vollständigen Differential, d. h. sie bestimmen eine Schar von $\infty^{n+\varrho+1}$ Vereinen, die durch eine Quadratur gefunden werden kann [Lie, Ges. Abh. 4, 161, Theor. I, S. 587 (1929)]. Der Verf. bespricht alles das, ohne von Vereinen zu reden, auf S. 139—143. Auf S. 143—154 verwertet er die ausgezeichneten Funktionen (Invarianten) der von $F_0, f_1, \dots, f_{n+\varrho-1}$ erzeugten Funktionengruppe. Schon vorher hat er auch den Fall erwähnt, wo diese Funktionen bereits selber eine Funktionengruppe bilden (S. 140). Er nennt dann die Funktionengruppe integrabel. Auf S. 154—157 beschäftigt er sich endlich mit dem Problem der drei Körper im R_3 . Erwähnt sei noch, daß der Verf. auf S. 135 auf die Prioritätsreklamation eingeht, die S. Lie und A. Mayer im Mai 1873 an die Pariser Akademie gerichtet haben, weil sie durch ihre Reduktion des Problems der drei Körper die von Radau aufgestellte Gleichung in $x_1, \dots, x_4, p_1, \dots, p_4$ auf die Integrationsoperationen 6, 4, 2 reduziert hatten, während vorher die Operationen 6, 4, 4, 2, 2 erforderlich waren. Die Akademie hatte diese Reklamation unberücksichtigt gelassen. Der Verf. behauptet nun, die Akademie habe sie gar nicht berücksichtigen können, denn dasselbe Ergebnis habe Jacobi schon 1842 abgeleitet (Ges. Werke 4, 315).

Engel (Gießen).

Haag, Jules: Sur certaines équations aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 259—261 (1941).

Verf. verallgemeinert die Untersuchung von Mitrinovitch [C. R. Acad. Sci., Paris 210, 783—785 (1940); dies. Zbl. 24, 402]. Die partielle Differentialgleichung

$$(1) \quad H(x, y, z, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

wo H eine beliebige Funktion und z_k den von Mitrinowitch definierten Ausdruck $(p x + q y)^{(k)}$ bedeuten, wird durch die Substitution $y = x t$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(2) \quad H\left(x, tx, F, x \frac{\partial F}{\partial x}, x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dots, x^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right) = 0$$

transformiert. Die allgemeine Lösung von (2) geht in die Lösung von (1) über, wenn wir n Integrationskonstanten durch n beliebige Funktionen von $\frac{y}{x}$ und t durch $\frac{y}{x}$ ersetzen.

Wenn (1) im besonderen Falle die lineare Gleichung $\sum_{k=0}^n a_k z_k = 0$ mit konstanten Koeffizienten a_k ist, so erhalten wir den von Mitrinowitch untersuchten Fall.

Rádl (Prag)

Kulk, W. van der: Eine Verallgemeinerung eines Theorems aus der Theorie der Pfaffschen Gleichungen für den einfachsten Fall $m = 2$. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 452—463 (1941).

Es seien $\overset{k}{F}(\xi^x, v^{\mu\lambda})$ analytische und in den $v^{\mu\lambda}$ homogene Funktionen der n Veränderlichen $\xi^x (x=1, \dots, n)$ und der $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ Veränderlichen $v^{\mu\lambda} (v^{\mu\lambda} = -v^{\lambda\mu}; \mu, \lambda = 1, \dots, n)$, wobei $k = 1, \dots, N-1-d$. Der Durchschnitt der Mannigfaltigkeit $\overset{k}{F}(\xi^x, v^{\mu\lambda}) = 0$ mit der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $v^{\mu\lambda} v^{\rho\sigma} = 0$ wird bei festen (veränderlichen) ξ^x als die lokale \mathfrak{S}_d^2 -Mannigfaltigkeit im Punkte ξ^x (das \mathfrak{S}_d^2 -Feld) bezeichnet. Jeder Punkt $v^{\mu\lambda}$ der lokalen \mathfrak{S}_d^2 -M. im Punkte ξ^x stellt eine Zweirichtung $B_{12}^\mu B_{11}^\lambda$ im Punkte ξ^x dar und bestimmt also in dem $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Raume aller im Punkte ξ^x angreifenden Vektoren eine, und zwar die durch B_2^μ, B_1^λ hindurchgehende Gerade. Der lokalen \mathfrak{S}_d^2 -M. ist somit eine lokale Regelfläche \mathfrak{R}_t von der Dimension t zugeordnet und dem \mathfrak{S}_d^2 -Felde ein \mathfrak{R}_t -Feld. In dieser ersten Mitteilung werden die \mathfrak{S}_d^2 - und \mathfrak{R}_t -Felder und insbesondere die Tangentialräume der lokalen \mathfrak{S}_d^2 - und \mathfrak{R}_t -Mannigfaltigkeiten untersucht.

O. Borůvka (Brünn).

Cartan, Élie: Sur un théorème des J. A. Schouten et W. van der Kulk. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 21—24 (1940).

Es handelt sich um den Beweis des folgenden Satzes: Es sei $(S) \theta_1 = \dots = \theta_q = 0$ ein System von $q (\geq 1)$ unabhängigen Pfaffschen Gleichungen und p die kleinste natürliche Zahl derart, daß $(\lambda_1 \theta_1 + \dots + \lambda_q \theta_q)^{p+1} \equiv 0 \pmod{\theta_1, \dots, \theta_q}$, wobei die $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ willkürliche Parameter und die $\theta_1, \dots, \theta_q$ die Ableitungen von $\theta_1, \dots, \theta_q$ bedeuten. Das System (S) kann sodann mittels q Pfaffscher Gleichungen, von denen jede von der Klasse $2p+1$ ist, definiert werden. Der Beweis stützt sich auf die vom Verf. erfundene Theorie von Pfaffschen Systemen in Involution und die diesbezüglichen Ergänzungen von E. Kähler (vgl. dies. Zbl. 11, 161). O. Borůvka.

Janet, Maurice: Sur les formules fondamentales de la théorie des groupes finis continus. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 424—425 (1941).

Es sei $x'_i = f_i(x, a)$ ($i = 1, \dots, n$) eine r -gliedrige Gruppe G im R_n , j_1, \dots, j_r seien die Parameter der identischen Transformation, und es sei bei beliebiger Wahl der a_k, b_k $c_i = \varphi_i(a, b)$. Mit Cartan definiert Verf. $2r$ Funktionen $\omega_k(\lambda, u)$, $\bar{\omega}_k(\lambda, u)$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_k(j, \lambda)}{\partial a_i} \omega_l(\lambda, u) = u_k = \frac{\partial \varphi_k(\lambda, j)}{\partial \lambda_i} \bar{\omega}_i(\lambda, u);$$

dann lassen sich die Gleichungen $dx'_i = df_i(x, a)$ so schreiben:

$$dx'_i - \frac{\partial f_i(x', j)}{\partial a_l} \bar{\omega}_l(a, da) = \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_k} dx_k,$$

worin man statt der $\bar{\omega}_l(a, da)$ auch die $\omega_l(a, da)$ einführen kann. Für jede der beiden Parametergruppen von G erhält man zwei ähnliche Formeln, in deren jeder die zur Parametergruppe gehörigen ω und $\bar{\omega}$ auftreten. — Eine andere Darstellung der Gleichungen

chungen $dc_i = d\varphi_i(a, b)$ schreibt Verf. explizit hin, indem er die dc_i linear durch die $\omega(a, da)$, $\bar{\omega}(b, db)$ ausdrückt, mit Koeffizienten, die bloß von c abhängen. Mit Hilfe einer willkürlichen Funktion $F(c)$ faßt er sie in eine Gleichung zusammen, aus der schon viel abgelesen werden kann. Setzt man die $\omega = 0$, so findet man die infinitesimalen Transformationen der 1. Parametergruppe (Lie) und ähnlich die der zweiten. Die Invarianz der $\omega(a)$ bzw. $\bar{\omega}(a)$ charakterisiert die erste bzw. zweite Parametergruppe. Schließlich erhält man einfache Formen für die Bedingungen, die aussagen, daß in der Gleichung $S_a S_b = S_c$ eines der Systeme a_i, b_i, c_i aus Konstanten besteht. — Die Arbeit zeigt, daß aus den scheinbar so abgegrastten Bedingungen $x'_i = f_i(x, a)$, $c_i = \varphi_i(a, b)$ immer noch merkwürdige neue Dinge hervorgeholt werden können. Engel.

Picone, M.: Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Rend. Semin. mat. fis. Milano 13, 66—90 (1939).

Die Methode der „Laplaceschen Transformierten mit endlichem Integrationsintervalle“, welche man dem Verf. (vgl. z. B. sein Lehrbuch „Appunti di Analisi Superiore“ 1940, S. 718; dies. Zbl. 24, 23) verdankt, wird hier insbesondere auf die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung $a_{20}(x)u_{xx} + 2a_{11}(x)u_{xt} + a_{02}(x)u_{tt} + a_{10}(x)u_x + a_{01}(x)u_t + a_{00}(x)u = f(x, t)$ angewandt. Man sucht nach einer in der Menge $x_1 < x < x_2$, $0 \leq t \leq T(x)$ definierten Lösung $u(x, t)$ mit Nebenbedingungen der Form $u(x_1, t) = u_1(t)$, $u(x_2, t) = u_2(t)$, $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$, von denen die beiden letzten im Falle $a_{20}(x) \equiv 0$ durch eine einzige der Form $2a_{11}u_x(x, 0) + a_{01}u(x, 0) = \psi(x)$ ersetzt werden. Das Hauptresultat lautet: Unter passenden Regularitätsannahmen kann das aufgestellte Problem nicht mehr als eine Lösung besitzen, wenn für $\lambda \rightarrow \infty$ die Funktion $a_{00} + (a_{01} - a_{10}T' - a_{20}T'')\lambda + (a_{02} - 2a_{11}T' + a_{20}T'^2)\lambda^2$ im Falle $a_{20} \geq 0$ stets unterhalb einer negativen Zahl, im Falle $a_{20} \equiv 0$ absolut genommen stets oberhalb einer positiven Zahl bleibt. Bei diesem Satz ist also der elliptische Fall ausgeschlossen, die Gleichung kann nämlich nur entweder hyperbolisch-parabolisch ($a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \leq 0$), oder rein-hyperbolisch ($a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0$), oder rein-parabolisch ($a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \equiv 0$), oder von 1. Ordnung ($a_{20} \equiv a_{02} \equiv a_{11} \equiv 0$) sein; die Einzelheiten dieser vier Typen werden erschöpfend erörtert. Daraus werden auch Eindeutigkeitssätze für den Fall abgeleitet, daß das Intervall $x_1 < x < x_2$ unendlich ist. Zum Schluß gibt Verf. einige Andeutungen bezüglich der Existenzfrage und der numerischen Rechnung für die Lösung des genannten Problems. G. Cimmino (Bologna).

Picone, Mauro: Su una recensione della mia memoria: Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della fisica-matematica degli „Annali scientifici“ dell'università di Jassy, Vol. 26, sez. 1 (1940). Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 273—280 (1941).

Gegen die im Titel genannte Arbeit (vgl. dies. Zbl. 23, 41) hatte R. V. Churchill in einer Besprechung in den Mathematical Reviews einige Einwände erhoben, die sich auf die vom Verf. entwickelte und angewandte Integrationsmethode für lineare partielle Differentialgleichungen bezogen. Diese Einwände drehten sich im wesentlichen um zwei Punkte: 1. daß das Verfahren des Verf. zu lang und kompliziert ausfalle und 2. daß seine praktische Anwendbarkeit durch die Wahl der als Näherungsfunktionen benutzten Polynome bedingt sei. Verf. erwidert zu 1., daß die von Herrn Churchill beklagten Komplikationen nicht von der Methode herrühren, sondern aus den Problemen, die mittels ihrer behandelt werden; als Beispiel dient die Integration der dreidimensionalen elastischen Gleichungen bei beliebigen Randbedingungen unter Zugrundelegung eines topologisch zu einem Würfel äquivalenten Gebietes; der zweite Einwand ist deswegen nicht berechtigt, weil die Methode des Verf. in denjenigen Fällen, in denen die klassischen Lösungsverfahren anwendbar sind, zu den gleichen Formeln führt wie diese. C. Miranda (Torino).

● **Churchill, R. V.: Fourier series and boundary value problems.** New York a. London: McGraw-Hill 1941. IX, 206 pag. \$ 2.50.

Matsumoto, Toshizô: Sur le principe de Duhamel-Nomitsu. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 22, 381—391 (1939).

Die Randwertaufgabe $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au + f(t)$; $u(x, 0) = u(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$

wird durch die Funktion $u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, t - \lambda, \lambda) d\lambda$ gelöst, sobald $F(x, t, \lambda)$ der (einfacheren) Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + AF + f(\lambda)$ und den gleichen Randbedingungen wie $u(x, t)$ genügt, wobei λ einen Parameter bedeutet. Dies ist der wesentliche Inhalt des „Prinzips von Duhamel-Nomitsu“. Seine direkte Verifikation erfordert wegen möglicher Unstetigkeiten von $F(x, t, \lambda)$ am Rande des (x, t) -Bereiches einige Aufmerksamkeit; im Mittelpunkt der vorliegenden Note, die einen strengen Beweis dieses Prinzips erbringt, steht daher die Herleitung der Formel für die Derivierthe eines Integrales $\int_0^t \Phi(t, \lambda) d\lambda$ unter genügend allgemeinen Voraussetzungen über $\Phi(t, \lambda)$. Im Anschluß hieran wird dann noch die auch sonst häufige Brauchbarkeit dieser Formel an einigen mit dem genannten Prinzip weiter nicht im Zusammenhang stehenden Beispielen aufgezeigt. *Schoblik (Brünn).*

Vecoua, N.: Über den Grenzübergang von den dynamischen Prozessen zu den stationären in Randproblemen der Wärmeleitung. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 651—657 u. dtsch. Zusammenfassung 657 (1940) [Russisch].

Die Dirichletsche Randwertaufgabe für die ebene Wärmeleitungsgleichung $k\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ führt bekanntlich auf die Integralgleichung für φ :

$$(1) \quad \varphi(s, t) + \frac{1}{\pi} \int_C d\alpha \int_0^t \varphi(\sigma, \tau) K(\sigma, s, t, \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} f(s, t),$$

mit:

$$K(\sigma, s, t, \tau) = \frac{1}{4k} (t - \tau)^{-2} r_{\sigma s}^2 \exp \left\{ -\frac{1}{4k} (t - \tau)^{-1} r_{\sigma s}^2 \right\},$$

$$d\alpha = r_{\sigma s}^{-1} \cos(r_{\sigma s}, n_\sigma) d\sigma,$$

worin $r_{\sigma s}$ den Abstand der auf der geschlossenen Randkurve C liegenden, zu den Bogenlängen σ bzw. s gehörigen Punkte $P(\sigma)$, $P(s)$, n_σ die innere Normale in $P(\sigma)$ und $f(s, t)$ eine bezüglich beider Argumente stetige Funktion bezeichnen. Analog führt die erste Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ auf die Integralgleichung

$$(2) \quad \mu(s) + \frac{1}{\pi} \int_C \mu(\sigma) d\alpha = \frac{1}{\pi} f(s).$$

Strebt nun $f(s, t)$ in (1) mit $t \rightarrow \infty$ gegen die stetige Grenzfunktion $f(s)$, so strebt, wie Verf. beweist, auch die Lösung $\varphi(s, t)$ von (1) mit $t \rightarrow \infty$ gegen die Lösung $\mu(s)$ von (2). Bedeutet weiter P' einen beliebigen Punkt im Innern von C , und deuten Akzente die Bildungen bei Ersetzung von $P(s)$ durch P' an, so wird weiter bewiesen, daß für $t \rightarrow \infty$ die Funktion

$$\Phi(P', t) = \int_C d\alpha' \int_0^t \varphi(\sigma, \tau) K' d\tau$$

$$F(P') = \int_C \mu(\sigma) d\alpha'$$

gegen σ strebt.

Harald Geppert (Berlin).

Gevrey, Maurice: Sur une généralisation du principe des singularités positives de M. Picard. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 581—584 (1940).

Verf. untersucht die algebraischen Singularitäten der Lösungen $z(x_1, \dots, x_m)$ einer homogenen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom „verallgemeinerten elliptischen Typus“ $Fz = 0$. Darunter soll folgendes verstanden werden: man setze $P \equiv (x_1, \dots, x_m)$, $Q \equiv (y_1, \dots, y_m)$ und bezeichne mit $\|a_{ij}(P)\|_{i,j=1,\dots,m}$ eine positiv-definite Matrix, mit $\|A_{ij}(P)\|_{i,j=1,\dots,m}$ die ihr adjungierte Matrix, mit ω das Gebiet $\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(P)(x_i - y_i)(x_j - y_j) < \varepsilon^2$, mit σ_m das Maß der Kugelhyperfläche von Radius 1; dann soll $Fz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2m(m+2)}{\sigma_m} \int_{\omega} \frac{z(Q) - z(P)}{\varepsilon^{m+2}} d\omega_Q + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + cz$ sein. Unter wenig

einschränkenden Voraussetzungen für die Koeffizienten a_{ij} , b_i , c_j und f in der Umgebung S eines Punktes O , erhält Verf. die folgenden Ergebnisse: Gilt $\lim_{P \rightarrow O} z(P) \overline{OP}^{m-2} = 0$ gleichmäßig in S , so ist z beschränkt; ist z in S positiv und beliebig großer Werte fähig, so ist z durch das Produkt von \overline{OP}^{m-2} mit einer stetigen positiven Funktion darstellbar; ist $z(P) \overline{OP}^{m-2}$ in S beschränkt, nicht aber gleichmäßig nach Null konvergent für $P \rightarrow O$, so ist z von festem Vorzeichen. G. Cimmino.

Vekua, I. N.: Randwertaufgaben der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. 3. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 497—500 (1940) [Russisch].

Vekua, I. N., und D. F. Charazov: Bemerkungen zur Fourierschen Methode. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 647—649 (1940) [Russisch].

Vecoua, Elias: Komplexe Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen mit Anwendungen auf Randwertprobleme. Trav. Inst. Math. Tbilissi 7, 161—249 u. dtsh. Zusammenfassung 249—253 (1940) [Russisch].

Δ^m bedeute den m -mal wiederholten Laplaceschen Operator für zwei Variable, L_k einen beliebigen linearen Differentialoperator k -ter Ordnung mit analytischen Koeffizienten, $f(x, y)$ eine analytische Funktion. Die Gleichung

$$L_n(u) = \Delta^n u + \sum_{k=1}^n L_k(\Delta^{n-k} u) = \begin{cases} f(x, y) \\ 0 \end{cases}$$

wird durch die Transformation $z = x + iy$, $z' = x - iy$ in komplexe Form übergeführt, welche wiederum einer Volterraschen Integralgleichung gleichwertig ist. Die allgemeine Lösung läßt sich mit Benutzung der Lösung der n -ten harmonischen Gleichung $\Delta^n u = 0$ durch einfache und Doppelintegrale ausdrücken, in denen mithin $2n$ willkürliche analytische Funktionen auftreten. Im Sonderfalle

$$L_n(u) = \Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \dots + a_n u$$

(a_k Konstante) kann man leicht eine Grundlösung konstruieren. Die gewonnenen Resultate lassen sich benutzen zur Lösung der folgenden Randwertaufgabe: eine Lösung der obigen Differentialgleichung zu bestimmen, die mit ihren $n - 1$ ersten Ableitungen auf dem Rande eines einfach zusammenhängenden Gebietes gegebene Werte annimmt. Die früher gewonnene Lösung führt auf Funktionalgleichungen, die sich in Fredholmsche überführen lassen unter Voraussetzung der Existenz der Lösung, die am Schluß noch bewiesen wird. Tautz (Breslau).

Spain, B.: A boundary problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 271—272 (1940).

Ist f eine im abgeschlossenen Gebiet D dreimal stetig differenzierbare Funktion, welche auf dem Rand samt ihren ersten Ableitungen identisch verschwindet, und sind außerdem die Ungleichungen $\Delta f > 0$, außer höchstens in endlich vielen Punkten, auf dem Rand und $\Delta f \geq 0$ im Innengebiete befriedigt, so folgt aus elementaren Überlegungen, daß $f \geq 0$ in D sein muß. G. Cimmino (Bologna).

Cimmino, Gianfranco: Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 322—329 (1940).

Zusammenfassung der Abhandlung desselben Verf.: „Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson“ (dies. Zbl. 24, 115). C. Miranda (Torino).

Rothe, Rudolf: Zur Integration der Potentialgleichung des Raumes. S.-B. Berlin. math. Ges. 38/39, 9—13 (1940).

Durch eine passende Lineartransformation mit komplexen Koeffizienten geht die Laplacesche Gleichung $\Delta u(x, y, z) = 0$ in die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung $\lambda_1 \varphi_{\eta\zeta} + \lambda_2 \varphi_{\zeta\xi} + \lambda_3 \varphi_{\xi\eta} = 0$ über, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei von Null verschiedene Konstanten sind. Diese Überlegung führt Verf. zur Bildung einer weitreichenden Klasse von harmonischen Funktionen dreier Veränderlichen. G. Cimmino.

Cinquini-Cibrario, Maria: Un complemento allo studio del problema di Dirichlet in domini infiniti. Atti Accad. Sci. Torino 76, 105—124 (1941).

Die Laplacesche Gleichung $\Delta u(x, y) = 0$ geht durch die Transformation $X = x^{-1}$, $Y = y$, $z(X, Y) = Xu(X, Y)$ in die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom sog. „gemischten Typus“ (1) $X^4 z_{xx} + z_{yy} = 0$ über. Unter passenden Regularitätsannahmen beweist Verf. die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletschen Problems für (1) in einem entweder auf dem Rand oder in seinem Inneren eine Strecke der Y -Achse enthaltenden Gebiet. Im zweiten Falle sind die Ableitungen der beiden ersten Ordnungen innerhalb des Gebietes auch auf der Y -Achse stetig; die Analytizität der Lösung gilt aber nur für $X > 0$ und für $X < 0$. G. Cimmino.

Magnaradze, L.: Fundamentale Randwertaufgaben der Potentialtheorie für Flächen mit Ecklinien. Trav. Inst. Math. Tbilissi 7, 25—45 u. dtsh. Zusammenfassung 45—46 (1940) [Russisch].

Verf. behandelt die erste und zweite Randwertaufgabe beim Newtonschen Potential und in der Hydromechanik sowie die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie unter Benutzung und Verallgemeinerung der Untersuchungen von J. Radon über die Randwertaufgaben des logarithmischen Potentials [S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 122, 1295—1438 (1913)]. Die Randfläche ist „quadrierbar“, d. h. sie genügt einer Lipschitzbedingung und hat einen Inhalt im Lebesgueschen Sinne. Sie besitze höchstens abzählbar viele Kanten, die mit stetigen Tangenten versehen sind. Die Vorgabe der Normalableitung, die ja nicht überall einen Sinn hat, erfolgt nicht punktweise, sondern es wird ihr Flächenintegral in Form einer beliebigen, absolut additiven Mengenfunktion vorgegeben. Methodisch lehnt sich die Arbeit eng an die erwähnte Radonsche an. Tautz (Breslau).

Kupradze, V. D.: Zur Auflösung der Dirichletschen Aufgabe für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 569—571 (1940) [Russisch].

Die Arbeit verfolgt ein gleiches Ziel wie die Methode von Muschelišvili (dies. Zbl. 24, 114). Es sei T ein mehrfach-zusammenhängendes Gebiet des Raumes, das außen von der Fläche S_0 , innen von den Flächen S_1, \dots, S_n berandet wird; die S_i seien einfach geschlossen mit stetiger Tangentialebene und mögen sich nicht überschneiden,

$S = \sum_{i=0}^n S_i$; T^* bedeute das zu T komplementäre Gebiet. Auf S sei die stetige Punktfunktion $f(P)$ gegeben; es ist in T eine Potentialfunktion $u(p)$ zu bestimmen, die auf S mit $f(P)$ übereinstimmt. Bezeichnet $r(p, Q)$ die Entfernung pQ , φ den Winkel zwischen pQ und der bezüglich T äußeren Normalen von S in Q , schließlich C eine beliebige negative Konstante, so wird die Lösung mittels einer Belegungsfunktion $\mu(Q)$ in der Form

$$u(p) = \int_S \mu(Q) K(p, Q) ds_Q; \quad K(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\cos \varphi}{r(p, Q)^2} + \frac{C}{r(p, Q)} \right\}$$

angesetzt, und die Randbedingung ergibt für $\mu(Q)$ die zu lösende Integralgleichung

$$(1) \quad -\mu(P) + \int_S \mu(Q) K(P, Q) ds_Q = f(P).$$

Verf. beweist, daß $\lambda = 1$ kein Eigenwert der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\mu(P) - \lambda \int_S \mu(Q) K(P, Q) ds_Q = 0$$

ist, so daß (1) nach den klassischen Methoden gelöst werden kann. Harald Geppert.

Privaloff, I. I.: Sur la définition d'une fonction harmonique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 102—103 (1941).

Sei u eine stetige Funktion im Gebiet G . Durch Mittelbildung auf einer Kugel und Grenzübergang gelangt man zur Definition der verallgemeinerten oberen bzw. unteren Laplaceschen Operatoren $\Delta^* u$ bzw. $\underline{\Delta}^* u$. Gelten bis auf eine Nullmenge die

Ungleichungen $\Delta^*u \leq 0 \leq \bar{\Delta}^*u$ und bis auf eine Menge von Nullkapazität die Ungleichungen $\bar{\Delta}^*u > -\infty$, $\bar{\Delta}^*u < +\infty$, so kann man schließen, daß u in G harmonisch ist.

G. Cimmino (Bologna).

Privaloff, I. I.: Quelques applications de l'opérateur généralisé de Laplace. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **31**, 104—105 (1941).

Sei u eine subharmonische Funktion im Gebiet G und bezeichne $\bar{\varrho}$, ϱ die symmetrische obere und untere Dichte der entsprechenden Massenverteilung; dann gelten überall in G die Ungleichungen $\varrho \leq \Delta^*u \leq \bar{\Delta}^*u \leq \bar{\varrho}$, wobei $\bar{\Delta}^*u$ und $\bar{\Delta}^*u$ die verallgemeinerten oberen und unteren Laplaceschen Operatoren (vgl. vorsteh. Ref.) bedeuten. Daraus erhält Verf. einige Sätze, z. B. den folgenden: Ist u eine in der Umgebung einer beschränkten, abgeschlossenen Nullmenge E subharmonische, nach oben beschränkte Funktion und ist in E bis auf eine Menge von Nullkapazität $\bar{\Delta}^*u > -\infty$, so ist u notwendigerweise in einem E enthaltenden Gebiet subharmonisch.

G. Cimmino (Bologna).

Maruhn, K.: Konvergenzuntersuchungen zur Theorie der Auftriebsverteilung vorgegebener Tragflügel. S.-B. Berlin. math. Ges. **38/39**, 17—42 (1940).

Das Problem der Auftriebsverteilung eines Tragflügels führt nach H. Schmidt [Z. angew. Math. Mech. **17**, 101 (1937)] auf folgende Randwertaufgabe: Gesucht ist in der Ebene der Polarkoordinaten r , ϑ eine für $r > 1$ überall reguläre Potentialfunktion $\varphi(r, \vartheta)$, die beim Grenzübergang auf den Einheitskreis die Randbedingung

$$\frac{4 \sin \vartheta}{\mathfrak{L}(\vartheta)} [\varphi(r, \vartheta)]_{r \rightarrow 1} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r \rightarrow 1} = \sin \vartheta \cdot \alpha_g(\vartheta)$$

erfüllt. Dabei sind $\mathfrak{L}(\vartheta)$, $\alpha_g(\vartheta)$ vorgegebene Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}(-\vartheta) = -\mathfrak{L}(\vartheta)$, $\alpha_g(-\vartheta) = \alpha_g(\vartheta)$. $\alpha_g(\vartheta) \sin \vartheta$ sei, abgesehen von endlich vielen Sprungstellen, stetig und besitze in den Stetigkeitsintervallen die gleichmäßig kon-

vergente Reihenentwicklung $\sin \vartheta \cdot \alpha_g(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \nu \vartheta$. Ferner sei $\frac{\mathfrak{L}(\vartheta)}{\sin \vartheta}$ größer als eine positive Konstante, und in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ gelte die gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\frac{4 \sin \vartheta}{\mathfrak{L}(\vartheta)} = \bar{k} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{2\nu} \cos 2\nu \vartheta \right), \quad (\bar{k} > 0, \text{ konstant})$$

wobei die $\sigma_{2\nu}$ den Bedingungen $\frac{1}{1 + 1/\bar{k}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\sigma_{2\nu}| < 1$ und $|\sigma_{2\nu}| \leq \frac{\text{const}}{2\nu}$ genügen sollen.

Nach Einführung der Reihe $\varphi(r, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{r^\nu} \sin \nu \vartheta$ ergibt sich aus der Randbedingung für die A_ν das unendliche Gleichungssystem

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (\sigma_{|\varrho - \nu|} - \sigma_{\varrho + \nu}) + A_\varrho \left(\frac{\varrho}{\bar{k}} + 1 \right) = \frac{c_\varrho}{\bar{k}} \quad (\varrho = 1, 2, \dots).$$

Setzt man nun für jedes $n=1, 2, \dots$ $\varphi_n(r, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu^{(n)}}{r^\nu} \sin \nu \vartheta$, wobei die $A_\nu^{(n)}$ Lösungen des endlichen Gleichungssystems

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n A_\nu^{(n)} (\sigma_{|\varrho - \nu|} - \sigma_{\varrho + \nu}) + A_\varrho^{(n)} \left(\frac{\varrho}{\bar{k}} + 1 \right) = \frac{c_\varrho}{\bar{k}} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n)$$

sind (Abschnittsmethode), so konvergieren, wie Verf. zeigt, die $\varphi_n(r, \vartheta)$ für $r \geq 1$ und $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte Lösung des Randwertproblems. Entsprechendes gilt für die Ableitungen $r \frac{\partial \varphi_n}{\partial r}$ unter gewissen zusätzlichen

Voraussetzungen über $\sin \vartheta \cdot \alpha_g(\vartheta)$. Damit ist zugleich der Nachweis für die Konvergenz des von I. Lotz [Z. Flugtechn. Motorluftsch. 22, 189 (1931)] entwickelten Verfahrens zur Berechnung der Auftriebsverteilung erbracht. — Im zweiten Teil wird unter ähnlichen Voraussetzungen wie oben die Konvergenz des Trefftz-Glauertschen Verfahrens [Math. Ann. 82, 306 (1921); Z. angew. Math. Mech. 1, 206 (1921)] gezeigt, bei dem die Koeffizienten $A_v^{(n)}$ des n -ten Näherungspolynoms aus der Erfüllung der Randbedingung in n Punkten des Einheitskreises gewonnen werden. Beim Beweis wird von den Wittmeyerschen Abschätzungen [Z. angew. Math. Mech. 16, 287—300 (1936); dies. Zbl. 17, 74] für endliche Gleichungssysteme Gebrauch gemacht. *Weissinger.*

Schubert, Hans: Über die unendlichen Gleichungssysteme der Prandtl'schen Tragflügeltheorie. S.-B. Berlin. math. Ges. 38/39, 43—63 (1940).

Verf. behandelt das in vorstehendem Referat geschilderte Randwertproblem mittels der Theorie der unendlichen Gleichungssysteme, und zwar betrachtet er einerseits das dem Lotz'schen Verfahren entsprechende System

$$(1) \quad y_\varrho - \frac{\bar{k}}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\varrho+\nu} - \sigma_{|\varrho-\nu|}}{\bar{k} + \nu} y_\nu = c_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \dots)$$

mit der Lösung $y_\varrho = (\bar{k} + \varrho) A_\varrho$, andererseits das System

$$(2) \quad x_\varrho + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau_{|\varrho-\nu|} - \tau_{\varrho+\nu}}{1 + k/\varrho} x_\nu = \frac{d_\varrho}{1 + k/\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots)$$

mit der Lösung $x_\varrho = \varrho A_\varrho$, das sich vermöge der Entwicklungen

$$\frac{\mathfrak{L}(\vartheta)}{4 \sin \vartheta} = \frac{1}{k} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \tau_{2\nu} \cos 2\nu \vartheta \right), \quad \frac{1}{4} \mathfrak{L}(\vartheta) \cdot \alpha_g(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \sin \nu \vartheta$$

aus der Randbedingung ergibt. Dabei werden $\alpha_g(\vartheta)$ und $\frac{\mathfrak{L}(\vartheta)}{\sin \vartheta}$ neben 1. Ableitung als stückweise stetig vorausgesetzt, außerdem soll $0 < m \leq \frac{\mathfrak{L}(\vartheta)}{\sin \vartheta} \leq M$ sein. Mittels der

Theorie der beschränkten Matrizen wird gezeigt, daß die Systeme (1) und (2) im Hilbertschen Raum eindeutig lösbar sind, vorausgesetzt, daß im Falle (2) die Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\tau_{2\nu}| < 1, \text{ im Falle (1) } \sum_{\nu=1}^{\infty} |\sigma_{2\nu}| < 1 + 1/\bar{k} \text{ oder auch } \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{2\nu}^2 < \frac{\sigma}{\pi^2 \bar{k}} \left(1 + \frac{1}{\bar{k}} \right)$$

erfüllt ist. Ferner konvergiert die mit Hilfe der Abschnittsmethode gewonnene Folge von Näherungslösungen stark gegen den Lösungsvektor, so daß die zugehörigen Näherungspolynome $\varphi_n(r, \vartheta)$ gleichmäßig gegen die Lösung $\varphi(r, \vartheta)$ konvergieren. Schließlich wird zur Herstellung stark konvergenter Näherungslösungen auch das E. Schmidt'sche Verfahren herangezogen, das allerdings numerisch der Abschnittsmethode unterlegen ist. *Weissinger (Adlershof).*

Variationsrechnung:

Cole, Nancy: The index theorem for a calculus of variations problem in which the integrand is discontinuous. Amer. J. Math. 62, 249—276 (1940).

Die von Bliss und Mason aufgestellte Theorie diskontinuierlicher Variationsprobleme wird hier in Parallelen zur Morseschen Indextheorie verallgemeinert und weiter ausgebaut. Es handelt sich um das Extremalintegral (in Parameterform)

$$(1) \quad I_\gamma = \int_{\gamma_1} F^1(x^i, \dot{x}^i) dt + \int_{\gamma_2} F^2(x^i, \dot{x}^i) dt$$

für eine Kurve $\gamma: x^i = x^i(t)$ der Klasse D^1 im (x^1, \dots, x^m) -Raum, welche fest gegebene Endpunkte hat und eine $(m-1)$ -dimensionale Fläche M einmal schneidet und dadurch in die Stücke $\gamma_1(t' \leq t \leq c)$ und $\gamma_2(c \leq t \leq t')$ zerfällt. Nachdem Ecken-

bedingung und konjugierter Punkt erklärt sind, wird die Theorie der zweiten Variation besprochen und mit Hilfe mehrfach gebrochener Extremalen die Morsesche Indexform eingeführt: eine quadratische Form, deren Index und Defekt die Anzahl der konjugierten Punkte des Anfangspunktes eines Extremalenbogens angibt, die in seinem Innern bzw. an seinem Endpunkt liegen. — Die Theorie der zweiten Variation einer solchen unstetigen Aufgabe erledigt sich, wie Ref. bemerken möchte, in der nicht-parametrischen Form (1) mit $i = 1, \dots, n = m - 1$ fast von selbst, da man die Eckenbedingung (Brechungsgesetz) unter die Randbedingung subsummieren kann: man faßt die x^i längs der Ausgangsextremalenstücke γ_1 bzw. γ_2 als $2n$ gesuchte Funktionen x^i, x^{n+i} einer unabhängigen Variablen τ auf vermöge $t = t' + (c - t')\tau$ längs γ_1 , $t = c + (t'' - c)\tau$ längs γ_2 . Für das kanonische System mit der doppelten Anzahl von Unbekannten bekommt man in dem einen Intervall $0 \leq \tau \leq 1$ eine selbst-adjungierte Randbedingung in der Morseschen Normalform. *E. Hölder.*

Bardell, Ross H.: The inequalities of Morse when the maximum type is at most three. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 242—245 (1940).

Beweis ohne Benützung der kombinatorischen Topologie für die Morseschen Ungleichungen der Variationsrechnung in einem ganz speziellen Fall. *Nöbeling.*

Threlfall, W.: Stationäre Punkte auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **51**, Abt. 1, 14—33 (1941).

Vortrag auf der Tagung der DMV in Baden-Baden. Darstellung von Grundgedanken, Ergebnissen und Problemen der Variationsrechnung im Großen von Marston Morse. *Nöbeling* (Erlangen).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Smithies, F.: The Fredholm theory of integral equations. Duke math. J. **8**, 107—130 (1941).

Nach Carleman gelten die Fredholmschen Auflösungsformeln für die Integralgleichung $x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b k(s, t) x(t) dt$ in etwas abgeänderter Gestalt auch dann noch, wenn bloß $|k(s, t)|^2$ und $|y(s)|^2$ summierbar vorausgesetzt werden. Dieses Ergebnis wird hier mit den Hilfsmitteln der Operatorenrechnung abgeleitet, indem zunächst die Auflösung der Operatorengleichung $x - \lambda K_p x = y$ in einem p - (also endlich-viel-) dimensionalen unitären Raum vorgenommen und dadurch, daß die geeignet gewählten Operatoren K_p der Bedingung $\lim_{p \rightarrow \infty} K_p = K$ unterworfen werden, durch Grenzübergang auf die gegebene Operatorengleichung $x - \lambda K x = y$ ($Kx = \int k(s, t) x(t) dt$ mit endlichem oder unendlichem Integrationsbereich) übertragen wird. An Stelle der Fredholmschen Determinanten erscheinen in der hier gegebenen Darstellung der Lösung Determinanten, deren Elemente von den Spuren der Determinanten

$$\left\| \int \int k^{(n)}(s, t) x_i(s) \overline{x_k(t)} ds dt \right\| \quad (n \geq 2)$$

gebildet werden, wo $k^{(n)}(s, t)$ den $(n - 1)$ -mal iterierten Kern und $x_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots$) ein vollständiges Orthogonalsystem im zugrunde liegenden Hilbertschen Raum der quadratisch summierbaren Funktionen bedeutet. Die Überführung dieser Ausdrücke in die von Carleman angegebene Gestalt wird durchgeführt. *Schoblik* (Brünn).

Vecoua, N.: Integralgleichungen vom Fredholmschen Typus mit Integralen im Hadamardschen Sinne. Trav. Inst. Math. Tbilissi **7**, 113—145 u. dtsch. Zusammenfassung 146 (1940) [Russisch].

Verf. behandelt Integralgleichungen der Form

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b \frac{k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{1+\mu}} = f(t),$$

das Integral im Hadamardschen Sinne genommen. Das Zeichen \sqcap bedeutet den „endlichen Teil“ des Integrals. Die erste Ableitung von $f(t)$ sowie die ersten und zweiten von $k(t, \tau)$ sind stetig. Für kleine λ ist die Lösung mittels der Neumannschen Reihe darstellbar. Die Vertauschbarkeit der auftretenden mehrfachen Hadamard-Integrale wird bewiesen. Für beliebige λ sind die F. Rieszschen funktionalanalytischen Methoden [Acta math. 41, 71—98 (1916)] anwendbar. Gearbeitet wird im Raume der stetig differenzierbaren Funktionen mit der üblichen Norm. Tautz (Breslau).

Vekua, N. P.: **Volterrasche Integralgleichungen mit einem Integral im Sinne von Hadamard.** Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 501—508 u. russ. Zusammenfassung 508 (1940) [Georgisch].

Kupradze, V. D.: **Zur Theorie der Integralgleichungen mit einem Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes. 1.** Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR 2, 23—28 (1941) [Russisch].

Soit γ une courbe fermée sans point double dans le plan de la variable complexe, s et t les nombres complexes correspondant aux points situés sur γ et $a(s)$, $c(s)$, $f(s)$, $K(s, t)$, $B(s, t)$ des fonctions données d'un ou de deux points. Posons

$$K(s, s)c(s) = b(s), \quad \frac{K(s, t) - K(s, s)}{t - s} + B(s, t) = A(s, t)$$

et considérons l'équation intégrale (φ étant la fonction inconnue)

$$(1) \quad K\varphi(s) \equiv a(s)\varphi(s) - \lambda b(s) \int_{\gamma} \left\{ \frac{1}{t-s} + A(s, t) \right\} \varphi(t) dt = f(s)$$

ainsi que l'équation homogène associée à (1):

$$(2) \quad \bar{K}\bar{\varphi}(s) \equiv a(s)\bar{\varphi}(s) - \lambda b(s) \int_{\gamma} \left\{ \frac{1}{s-t} + A(t, s) \right\} \bar{\varphi}(t) dt = 0;$$

les intégrales sont prises avec leurs valeurs principales au sens de Cauchy. L'A. examine les cas où (1) peut être ramené à une équation de Fredholm. Pour que l'équation (1) admette une solution, il faut et il suffit que $f(s)$ satisfasse aux conditions $\int_{\gamma} f(s)\bar{\varphi}_i(s)ds = 0$, où $\bar{\varphi}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sont les k solutions linéairement indépendantes de (2). Si k est le nombre des solutions indépendantes de l'équation homogène (1) avec $f(s) \equiv 0$, on a

$$k - \bar{k} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} d \log \frac{a(s) + \lambda \pi i b(s)}{a(s) - \lambda \pi i b(s)};$$

Première partie de la démonstration de ces résultats. B. Hostinský (Brünn).

Kupradze, V. D.: **Zur Theorie der Integralgleichungen mit einem Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes. 2.** Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR 2, 227—232 (1941) [Russisch].

Fin de la démonstration des théorèmes énoncés dans la première partie (voir le ref. précédent); d'autres démonstrations ont été données déjà par S. Michlin [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 315—317 (1939); ce Zbl. 22, 51] et J. Vecoua [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 327—330 (1940); ce Zbl. 23, 46]. B. Hostinský (Brünn).

Doubrowsky, W.: **Équations intégrales du type de Fredholm dont le noyau est une fonction d'élément et d'ensemble dans un espace abstrait.** Rec. math. Moscou, N. s. 9, 403—419 u. franz. Zusammenfassung 419—420 (1941) [Russisch].

Verf. entwickelt in Analogie zur klassischen Fredholmschen Theorie eine Lösungstheorie der Integralgleichungen

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{A_y} k(x, dA_y) \varphi(y) \quad \text{und} \quad \psi(e) = g(e) + \lambda \int_{A_y} k(y, e) \psi(dA_y),$$

wo mit x bzw. e Elemente bzw. Teilmengen eines abstrakten Raumes A und mit λ ein (komplexer) Parameter bezeichnet werden; die Integrale sind im Lebesgue-Stielt-

jesschen Sinn zu verstehen. e muß einer näher festgelegten Mengenfamilie angehören, die auftretenden Elementfunktionen werden als meßbar, die Mengenfunktionen als absolutadditiv vorausgesetzt. Zwei weitere, über $k(x, e)$ gemachte Voraussetzungen, die eine Art Beschränktheitsforderung darstellen, garantieren die Existenz von Lösungen und die Konvergenz der auftretenden Reihen. — Insbesondere wird der Fall eines endlichen oder abzählbar unendlichen A sowie der Fall eines beschränkten und L -meßbaren A in Verbindung mit einem Kern der Gestalt $k(x, e) = \int l(x, y) dy$ näher erörtert.

Schoblik (Brünn).

Giraud, Georges: Équations de Fredholm dont le noyau est fonction holomorphe d'un paramètre; équations analogues où figurent des intégrales principales. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 47—49 (1940).

Verf. betrachtet die lineare Operation

$$J_{\lambda}u(X) = u(X) - \int_U^{(m)} G(X, A; \lambda)u(A) dV_A,$$

wo G holomorph in bezug auf λ in einem Bereiche D ist und für festes λ in bezug auf die Punkte X, A gewisse Bedingungen erfüllt. Für jeden Wert von λ existiert ein lösender Kern (im gewöhnlichen oder weiteren Sinn); er kann so gewählt werden, daß er meromorph in bezug auf λ ist und gewisse weitere Bedingungen erfüllt der Art, daß für den Fall, daß λ ein Pol ist, die Gleichung $J_{\lambda}u = 0$ mehr als k voneinander linear unabhängige Lösungen besitzt, wenn k die Mindestzahl von solchen Lösungen für in D variierendes λ ist. Ähnliches gilt für die lineare Operation

$$J_{\lambda}u(X) = g(X; \lambda)u(X) - \int_U^{(m)} G(X, A; \lambda)u(A) dV_A,$$

unter der Voraussetzung, daß die Bedingungen für Integralgleichungen mit Hauptintegralen erfüllt, G, g holomorph in bezug auf λ in D sind und die in der zweiten der nachstehend angegebenen Arbeiten definierte Funktion TJ_{λ} nicht verschwindet, wenn λ in D bei beliebigen Werten der übrigen Veränderlichen variiert. (Vgl. dies. Zbl. **17**, **71**; **14**, 309; **16**, 196.)

Volk (Würzburg).

Okamura, Hirosi: Sur certaines équations de Volterra singulières. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **22**, 429—453 (1939).

Es werden Volterrasche Integralgleichungen des folgenden Typs betrachtet:

$$(A \pm) \quad \varphi(x) \pm m(x) \int_0^x [1 + \Gamma(x, s)] \varphi(s) ds = f(x) \quad (0 \leq x \leq b).$$

Die eingehenden Funktionen sind meßbar, $m(x) \geq 0$, $\int_0^b m(x) dx = \infty$, $\int_{\varepsilon}^b m dx < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$. Je nachdem, ob das Integral als rein Lebesguesches oder Cauchy-Lebesguesches aufgefaßt wird, soll $\Gamma(x, s)$ folgenden Bedingungen genügen: Im ersten Falle sei

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} |\Gamma(x, x)| < 1, \quad |\Gamma(x_1, s) - \Gamma(x_2, s)| \leq \int_{x_1}^{x_2} L(x) dx, \quad L(x) \geq 0 \text{ irgendeine über } [0, b]$$

summable Funktion. Im zweiten Falle existieren $\Gamma'_x, \Gamma'_s, \Gamma''_{xs}$ und sind beschränkt. $\Gamma(x, s)$ genügt derselben Lipschitzbedingung wie im ersten Falle. Weiterhin sei $\Gamma(x, s) = - \int_s^x \Gamma_2(x, t) dt$, $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = \Gamma_{21}(x, s)$; $\Gamma_{21}(x, s)$, $\Gamma_2(x, x)$ und $\int_0^x |\Gamma_{21}(x, s)| ds$ seien summabel in $[0, b]$. Des weiteren werden noch Gleichungen von der Form

$$(B \pm) \quad \varphi(x) \pm \int_0^x [m(x) + \omega(x, s)] \varphi(s) ds = f(x)$$

gelöst, wobei jetzt $|\omega(x, s)| \leq \sigma(x)$, $\int_0^b \sigma(x) dx < \infty$ ist. Für $f(x)$ werden die schwäch-

sten Voraussetzungen gemacht, die möglich sind, und die man erhält, wenn man $\varphi(x)$ als L -integrabel bzw. als integrabel im Cauchy-Lebesgueschen Sinne voraussetzt; z. B. im ersten Falle bei $(A \pm)$ sei $f(x) = g(x) + h(x)$, $g(x)$ summabel und $h(x)$ von der Form $h(x) = m(x) \int_0^x \alpha'(s) ds$ ($\alpha'(s)$ summabel). Die Lösungen werden durch sukzessive Approximation gewonnen; bei (A_+) , (B_+) gibt es je nur eine Lösung, im anderen Falle unendlich viele. Die Resultate finden Anwendung bei der Integralgleichung $\int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$. $K(x, s)$ ist analytisch, $K(x, s) = p x^i + q s^i + \text{Glied. höh. O.}$ ($i \geq 1$). Da die Lösung mindestens summabel sein muß, existiert $f'(x)$, und die Gleichung ist auf eine der vorigen Typen zurückführbar, aus welcher sich die weiteren Bedingungen über $f'(x)$ ergeben.

Tautz (Breslau).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Tricomi, Francesco: Cos'è l'analisi funzionale? *Saggiatore* 1, 18—26 (1940).

Ein allgemein gehaltener Artikel, der einem mit den Anfängen der Infinitesimalrechnung vertrauten Leser die grundlegenden Begriffe der Funktionalanalysis nahebringen soll. Behandelt werden: Fonctions de lignes, Variationsrechnung und Funktionaltransformationen.

C. Miranda (Torino).

Yosida, Kôzaku, and Masanori Fukamiya: On regularly convex sets. *Proc. Imp. Acad. Jap.* 17, 49—52 (1941).

E sei ein Banachscher und \bar{E} der zu E konjugierte Raum. Mit Hilfe einer Dualität zwischen den abgeschlossenen konvexen Mengen aus E und regulär konvexen Mengen aus \bar{E} führen die Verff. einen neuen Beweis des Krein-Milman'schen Satzes durch: In der beschränkten, regulär konvexen Menge $F \subseteq \bar{E}$ gibt es einen Punkt f_0 derart, daß $f_0 \neq \frac{1}{2}(g + h)$ ist für irgendwelche $g, h \in F$, $g \neq f_0 \neq h$. Dabei heißt eine Menge $F \subseteq \bar{E}$ nach M. Krein und V. Smulian (s. dies. Zbl. 24, 413) regulär konvex, falls es zu jedem $f \in F$, $g \in E$ einen Punkt $x_0 \in E$ gibt, so daß $\sup_{f \in F} f(x_0) < g(x_0)$ ist. J. Novák (Brünn).

La Salle, J. P.: Pseudo-normed linear spaces. *Duke math. J.* 8, 131—135 (1941).

The concept of pseudo-normed linear spaces (p. l. s.) was introduced by Hyers [Duke math. J. 5, 628—634 (1939); this Zbl. 21, 411], who also has shown that these spaces are equivalent to linear topological spaces. The author gives necessary and sufficient conditions in order that there exist a non-null linear functional on a p. l. s. (It is shown by an example that there exist p. l. s.'s without any such functionals.) It is then proved that the set of all linear mappings of a p. l. s. on a p. l. s. is itself a p. l. s.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Sobczyk, Andrew: Projektions in Minkowski and Banach spaces. *Duke math. J.* 8, 78—106 (1941).

By a projection P of a Banach space E on its subspace E' we mean a linear transformation of E such that $P^2 = P$ and $Pf = f$ if and only if $f \in E'$. In Hilbert space there exist projections on every subspace, but in more general Banach spaces this is not always the case. Indeed, F. J. Murray succeeded to show (this Zbl. 16, 214), that if E is the function space L_p ($1 < p \neq 2$) or the sequence space l_p ($1 < p \neq 2$), then there are subspaces in E on which no projection exists. The first part of the present paper gives a new and briefer demonstration of this result, affording an improved insight into the situation in l_p . — Various generalisations of l_p -spaces are then introduced. — A class of sequence spaces S is studied, which have the following property: If $\{x_n\} \in S$, then also $\{\|x_n\|\} \in S$ and $\|\{\|x_n\|\}\| = \|\{x_n\}\|$. These spaces include Banach spaces with a base $\{X_n\}$, having the corresponding symmetry property: if $x = \sum x_n X_n$ is the expansion of an element, then $\sum \|x_n\| X_n$ is also an element and $\|\sum \|x_n\| X_n\| = \|\sum x_n X_n\|$. In any space S , the Hilbert norm $\|x\|_2 = (\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$ is

introduced on a certain dense linear subset, and it is shown that if a projection exists on every subset of S , then the $\|\dots\|_2$ -norms of the radii of the unit sphere of S in certain directions must be bounded both from 0 and from ∞ . In particular, if for a space S these directions are "minimal" or "maximal", then S must be isomorphic to Hilbert space. — Spaces generated by two-dimensional norms and Orlicz spaces defined by a monotone function $M(t)$ are then studied [cf. W. Orlicz, Bull. int. Acad. Polon. Sci. A, Nr 8/9, 207—220 (1932); this Zbl. 6, 315]. It is shown that if there exists a projection on every subspace of such a space, then the space must be isomorphic to Hilbert space. — These results suggest the following conjecture: A Banach space, such that there exists a projection on every subspace, the norms of the projections being uniformly bounded, is isomorphic to Hilbert space.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Nakano, Hidegorô: Teilweise geordnete Algebra. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 437—441 (1940).

Verf. schlägt eine einheitliche Behandlung der Spektraltheorie teilweise geordneter Moduln von Freudenthal (dies. Zbl. 14, 313) und der Spektraltheorie abstrakter reeller Operatoren von Steen (dies. Zbl. 14, 162) vor. Ohne ausführliche Beweise.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Neumark, M.: Self-adjoint extensions of the second kind of a symmetric operator. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 53—89 u. engl. Zusammenfassung 90—104 (1940) [Russisch].

Neumark, M.: Spectral functions of a symmetric operator. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 277—309 u. engl. Zusammenfassung 309—318 (1940) [Russisch].

The object of this paper is to define a new kind of extension of symmetric operators in (non-separable) Hilbert space \mathfrak{H} . — A closed linear operator A in \mathfrak{H} with the domain dense in \mathfrak{H} is called N -operator in \mathfrak{H} . If A is an N -operator in \mathfrak{H} and \mathfrak{H}_1 a closed subspace in \mathfrak{H} , then \mathfrak{H}_1 is called to be invariant with respect to A , provided that $\overline{D(A)\mathfrak{H}_1} = \mathfrak{H}_1$ and $A(D(A)\mathfrak{H}_1) \subset \mathfrak{H}_1$ where $D(A)$ being the domain of A , $\overline{\mathfrak{M}}$ closure of \mathfrak{M} and $A\mathfrak{M}$ the range of A on \mathfrak{M} . A_1 in \mathfrak{H}_1 defined by $A_1 = A$ on $D(A)\mathfrak{H}_1$ is called the part of A in \mathfrak{H}_1 and A the extension of A_1 into \mathfrak{H} . A_1 is evidently an N -operator in \mathfrak{H}_1 . If E_1 is the projection in \mathfrak{H} onto \mathfrak{H}_1 and B_1 the operator in \mathfrak{H}_1 with domain

$D(B_1) = E_1 D(A^*)$ defined by $B_1 E_1 f = E_1 A^* f$, $f \in D(A_1^*)$ then $A_1^* = \widetilde{B}_1$, \widetilde{B}_1 being the closure of B_1 . Further every element $f \in D(A_1^*)$ is expressible as $f = E_1 \varphi + E_1 A g_0$ where $\varphi \in D(A^*)$, $E_1 A g_0 \in D(A_1^*)$ and $A_1^* E_1 g_0 = -E_1 g_0$. — Let H be a self-adjoint operator in \mathfrak{H} . If H_1 is the part of H in \mathfrak{H}_1 , then H_1 is closed symmetric operator in \mathfrak{H}_1 and H_1 is self-adjoint if and only if \mathfrak{H}_1 reduces H . When λ is not real, every element $f \in D(H_1^*)$ is representable as $f = E_1 \varphi + \psi$ where $\varphi \in D(H)$ and ψ satisfies $H_1^* \psi = \lambda \psi$. For such ψ , there exists a sequence $f_n \in D(H)$ such that $E_1 H f_n = \lambda E_1 f_n$, $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1 f_n$ by the strong topology. — Passing to the Hermitean operator H , we

define $\mathfrak{M}^- = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(H - i1)$ and $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(H + i1)$ where $\mathfrak{R}(H)$ is the range of H . These are called the deficiency spaces of H . If H is a closed Hermitean operator, then $D(H)\mathfrak{M}^- = D(H)\mathfrak{M}^+ = 0$, $\overline{D(H) + \mathfrak{M}^-} = \overline{D(H) + \mathfrak{M}^+} = \mathfrak{H}$, and $D(H)$, \mathfrak{M}^+ , \mathfrak{M}^- are linearly independent if and only if H is symmetric. And every element $f \in D(H)(\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)$ is representable as $f = \varphi - X\varphi$ where X is an isometric operator with domain $D(X) = \mathfrak{M}^-(\mathfrak{M}^+ + D(H))$ and range $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{M}^+(\mathfrak{M}^- + D(H))$. If $\varphi \in \mathfrak{M}^- \mathfrak{M}^+$, then $X\varphi = \varphi$. — If H_1 is a closed symmetric operator in \mathfrak{H}_1 , then there exists a family of bounded self-adjoint operators $E_1(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < +\infty$) in \mathfrak{H}_1 satisfying the conditions (1°) $(E_1(\lambda)f, f)$ is a non-decreasing function of λ , (2°) $E_1(\lambda) \rightarrow 0$ as $\lambda \rightarrow -\infty$, $E_1(\lambda) \rightarrow 1$ as $\lambda \rightarrow +\infty$, (3°) $E_1(\lambda)$ is left-hand continuous, (4°) for every element $f \in \mathfrak{H}_1$ and every finite interval $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ ($\lambda_1 < \lambda_2$) $E_1(\Delta)f \in D(H_1)$ and

$H_1^* E_1(\Delta)f = \int_{\Delta} \lambda dE_1(\lambda)f$, (5°) for the self-adjoint extension H of H_1 , $Hf = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_1(\lambda)f$,

and (6°) $(H_1 - \lambda 1)^{-1} f = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda)^{-1} dE_1(\mu) f$, $(H_1^* - \bar{\lambda} 1)^{-1} f = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \bar{\lambda})^{-1} dE_1(\mu) f$.

Let further \mathfrak{H}' be an arbitrary Hilbert space including \mathfrak{H}_1 such that $\dim \mathfrak{H}_1 \leq \dim(\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}_1) = \dim \mathfrak{H}'$ ($\dim \mathfrak{H}$ being the cardinal number of the system of orthogonal elements in \mathfrak{H}) and E_1 the projection in \mathfrak{H}' onto \mathfrak{H}_1 . Then there exists in \mathfrak{H}' a selfadjoint extension H' of H_1 such that $E_1(\lambda) f = E_1 \cdot E'(\lambda) f$ for all $f \in \mathfrak{H}_1$, $E'(\lambda)$ being the spectral function of H' . The spectral functions of symmetric operators considered here are of "the Carleman type".

Izumi (Sendai).

Julia, Gaston: Sur une définition d'opérateurs linéaires dans l'espace hilbertien. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 733—736 (1941).

Soit e_1, e_2, \dots un système orthonormal complet dans l'espace H de Hilbert et soit f_1, f_2, \dots un système donné d'éléments de H . Soit D_A l'ensemble des éléments g de H , pour lesquels $\sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n) f_n$ converge fortement, la limite étant alors désignée par Ag . La transformation A est évidemment linéaire et on a $A e_n = f_n$ pour $n = 1, 2, \dots$. Soit g_1, g_2, \dots le système orthonormal qu'on déduit du système f_1, f_2, \dots par le procédé d'orthonormalisation de E. Schmidt; on a alors $f_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} g_k$, les nombres a_{nk}

ne dépendant que de la nature intrinsèque du système f_1, f_2, \dots . Posons $a_{nk} = 0$ pour $k > n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit borné est que les matrices $\|a_{nk}\|_1$ ($n = 1, 2, \dots$) admettent une borne commune.

Béla de Sz. Nagy.

Julia, Gaston: Sur une décomposition en produit infini des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 829—831 (1941).

Soit A la transformation linéaire de l'espace hilbertien, engendrée par le système orthonormal complet $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ et par le système des vecteurs f_1, f_2, \dots (déterminant un sous-espace de dimension infinie) (voir le référat précédent). Soit g_1, g_2, \dots le système dérivé des f_k par le procédé de l'orthonormalisation de E. Schmidt et soit A_p la transformation linéaire bornée déterminée par les équations suivantes: $A_p g_p = f_p$ et $A_p g_n = g_n$ pour $n \neq p$. Soit U la transformation isométrique définie par $U \varphi_n = g_n$. Le produit infini $\dots A_p A_{p-1} \dots A_1 U f$ convergera précisément pour les f appartenant au domaine de A et sa limite sera égale à $A f$.

Béla de Sz. Nagy.

Carathéodory, C.: Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 351—389 (1941).

Kürzlich hat der Verf. eine Art von Algebraisierung des Lebesgueschen Integralbegriffes vorgeschlagen (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1938**, H. 1, 27—69; dies. Zbl. **20**, 297). In seiner Theorie sind Punktmengen durch die Elemente einer allgemeinen Booleschen Algebra (Somen genannt) ersetzt. Die Rolle der Ortsfunktionen $f(x)$ übernehmen die sog. „Somenskalen“; unter einer Somenskala $S(y)$ versteht er eine mit dem Parameter y ($-\infty < y < \infty$) monoton wachsende Schar von Somen [$S(y)$ entspricht im Falle von Punktmengen der Menge der Punkte x , für die $f(x) \leq y$ gilt]. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß der Riesz-Fischersche Satz, die Ergodensätze von G. D. Birkhoff und J. v. Neumann, sowie deren Verallgemeinerungen auch in dieser Theorie ihre Gültigkeit beibehalten.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Wiener, Norbert, and Aurel Wintner: Harmonic analysis and ergodic theory. Amer. J. Math. **63**, 415—426 (1941).

Let τ be a measure preserving transformation of a space S into itself (the measure of S being supposed finite). Let C denote a circle with the ordinary measure and let ϱ be the rotation of C with the angle λ . Apply the Birkhoff ergodic theorem on the transformation $\tau \times \varrho$ of the product space $S \times C$. It then follows by Fubini's theorem that if $f(P)$ is of class (I) on S , then those points P for which

$$(1) \quad M_j \{e^{ij\lambda} f(\tau^j P)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n e^{ij\lambda} f(\tau^j P)$$

does not exist is a set of measure 0, depending of course on λ . — The authors show that, in the metrically transitive case, (1) exists for every λ and almost all P , where the 0-set excluded is independent of λ . — If, in addition, τ is a mixture, then (1) is = 0 for $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ and $= \int_S f dS / \int_S dS$ for $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$. — This implies the following

“harmonic law of large numbers”: If $\{x_j(t)\}$ is a sequence of independent functions on $0 \leq t \leq 1$ of class (L) having the same distribution function of vanishing first moment, then $M_j \{e^{ij\lambda} x_j(t)\}$ exists and = 0 for almost all t and for every real λ , where the 0-set excluded is independent of λ . — The proof is based on the following lemma: Let $a_j (-\infty < j < \infty)$ be a sequence for which $c_k = M_j \{a_j \bar{a}_{j-k}\}$ exists (for $-\infty < k < \infty$), then there exists a monotone function $\sigma(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) such that $c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\sigma(x)$ ($-\infty < k < \infty$). The set of discontinuities of $\sigma(x)$ is called the point spectrum of $\{a_j\}$. If, in addition, $\{a_j\}$ is bounded, then $M_j \{a_j e^{ij\lambda}\}$ exists and vanishes for every real λ which, when reduced mod 2π , is not contained in the point spectrum of $\{a_j\}$.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Praktische Analysis:

● British association for the advancement of science. Mathematical tables. Vol. 9: Tables of powers giving integral powers of integers. Initiated by J. W. L. Glaisher. Extended by W. G. Bickley, C. E. Gwyther, J. C. P. Miller and E. G. Ternouth. Cambridge: Univ. press 1940. XII, 132 pag. 15/-.

● Bachheimer, R.: Potenz- und Wurzeltafeln enthaltend die Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 1—1000, sowie die Umfänge und Inhalte der Kreise mit den Durchmessern 1—1000. Im Anhang: Aufzinsungs-, Abzinsungs-, Rentenendwert-, Rentenbarwert- und Annuitätenfaktoren. 10. Aufl. Wien: Franz Deuticke 1941. 32 S. RM. 1.—.

● Plummer, H. C.: Four figure tables with mathematical formulae. London: Macmillan 1941. IV, 90 pag. 3/6.

● Müller, O., e M. Rajna: Tavole di logaritmi con cinque decimali. 29. ediz. riveduta per cura di Luigi Gabba. Milano: Ulrico Hoepli 1940. XXXII, 203 S. L. 8.—.

Handliche 5stellige Tafel der Briggschen Logarithmen, Additions- und Subtraktionslogarithmen, der Log. der trigonometrischen Funktionen in $^\circ$ -Teilung, sowie derselben für kleine Bögen. Angenehm ist die Eingliederung der Proportionalitätälchen in die Zehnerkolonnen der Log.-Tafel. Beigefügt ist eine Tafel der Werte der trigonometrischen Funktionen auf 4 Dezimalen in $10'$ -Intervallen, der Quadratzahlen bis 1000 und einige kleinere Hilfstafeln. Bedauerlich sind 17 Druckfehler, die zwar berichtigt sind, aber die Handhabung erschweren.

Harald Geppert (Berlin).

● Allen, E. S.: Six place tables. 6. edit. New York a. London: McGraw-Hill 1941. XXIII, 181 pag. \$ 1.50.

● Jadanza, N.: Tavole tacheometriche centesimali. 7. ediz. stereotipa. Torino: R. Luigi Avalle 1940. 64 S. L. 14.—.

Die der Entfernungsbestimmung dienenden Tafeln enthalten die Werte von $G \cos^2 \alpha$ und $G \sin \alpha \cos \alpha$ für $G = 1, 2, \dots, 9$ und $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 31^\circ$; α schreitet dabei in Schritten von $0^\circ, 02$ fort, so daß in jeder Spalte 50 Zahlenwerte stehen. Bis $G = 4$ sind fünf, für $5 \leq G \leq 9$ vier Stellen hinter dem Komma angegeben, so daß bei Distanzen bis zu 500 m Höhenunterschied und Entfernung zweier Punkte auf 1 cm genau berechnet werden können. Vorausgeschickt ist eine Tafel zur Verwandlung der $^\circ$ - in $^\circ$ -Teilung (hier sind die Bezeichnungen Grade und Sekunden zu vertauschen!); am Schluß sind die Werte von $\cotang \omega$ für $0^\circ, 200$ bis $1^\circ, 40$ auf zwei Stellen hinter dem Komma tabuliert.

Harald Geppert (Berlin).

Lowan, Arnold N., and Gertrude Blanch: Errors in Hayashi's table of Bessel functions for complex arguments. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 291—293 (1941).

Es wird eine Reihe von Rechenfehlern in den von A. Dinnik mitgeteilten Tabellen über Zylinderfunktionen mit komplexem Argument bei K. Hayashi (Fünfstellige Funktionentafeln, S. 105—109. Berlin 1930) angegeben und berichtigt, wobei Fehler kleiner als die Einheit in der vierten Dezimale unterdrückt werden. Die Funktionswerte wurden mit Hilfe von Summationsproben kontrolliert, die auf einem in der Arbeit angegebenen Theorem beruhen. *Gran Olsson* (Trondheim).

Sadowsky, Michael: A formula for approximate computation of a triple integral. Amer. Math. Monthly **47**, 539—543 (1940).

Für die angenäherte Berechnung eines dreifachen, über das Innere eines Würfels erstreckten Integrals wird eine Formel angegeben, bei der die Werte des Integranden an 42 nur auf der Oberfläche des Würfels gelegenen Stellen benutzt werden. Die Formel ist für Integranden, die Polynome in den Koordinaten von höchstens 5. Grade sind, exakt. Es gibt keine Formel, die nur Oberflächenwerte benutzt und für Polynome 6. Grades exakt gilt. Von allen Formeln, die nicht mehr als 42 Oberflächenwerte benutzen, ist die vom Verf. angegebene die genaueste in dem Sinne, daß keine andere derartige Formel für alle Polynome 5. Grades exakt gilt. *Collatz* (Karlsruhe).

Heuman, Carl: Tables of complete elliptic integrals. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **20**, 127—206 (1941).

Die Arbeit enthält Tabellen über vollständige elliptische Normalintegrale, die für die Anwendung auf gewisse dynamische Probleme berechnet sind: 1. Tabellen der Funktionen $F_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} F(\alpha)$ und $E_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} E(\alpha)$, wo $F(\alpha)$ und $E(\alpha)$ das vollständige elliptische Integral erster bzw. zweiter Gattung bezeichnen. 2. Tabellen der Funktion $G_0(\alpha) = F_0(\alpha) + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{180}{\pi} \arcsin k'\right)$, wo $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ und k den Modul angibt. 3. Tabellen der Funktion

$$A_0(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k'^2 \sin \beta \cos \beta \Delta' \beta}{k'^2 \cos^2 \beta + k^2 \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \psi}$$

mit $\Delta \psi = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$, $\sin^2 \beta = (p - k^2)/k'^2 p$, $\Delta' \beta = (1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2}$. p ist gleich dem beim Legendreschen Normalintegral dritter Gattung auftretenden Parameter. Einige Druckfehler, die in den Tafeln von Legendre vorhanden sind, werden berichtigt. — In einem Anhang wird gezeigt, wie die hier berechneten Integrale beim Problem des sphärischen Pendels und des schweren symmetrischen Kreiseis auftreten (s. C. Heuman, Beitrag zur Theorie des sphärischen Pendels, Stockholm 1918, sowie Beitrag zur Theorie des Pendelgyroskops, Stockholm 1927). *Gran Olsson*.

De Sampaio Pacheco, Murillo: Über eine Klasse von Nomogrammen. Ann. Acad. Brasil. **12**, 331—337 (1941) [Portugiesisch].

In Netztafeln für 3 Veränderliche schneiden sich 3 zusammengehörige Netzklinien jeweils in einem Punkt. Wählt man insbesondere jede der 3 Netzklinienscharen als Büschel von Geraden durch einen Punkt, so erhält man eine Tafel, die der Verf. als Sonderfall seines Nomogramms hervorhebt (S. 335). Man wird dabei zweckmäßig die Büschel je durch ihren Scheitel und durch eine Funktionsleiter, die nach der zum Büschel gehörigen Veränderlichen beziffert ist, andeuten. Läßt man auch noch die Scheitel auf Funktionsleitern wandern, so kommt man zur allgemeinen Nomogrammform des Verf. mit 6 Funktionsleitern, also für 6 Veränderliche. Zusammengehörige Werte der 6 Veränderlichen haben die Eigenschaft, daß ihre 6 Bildpunkte auf 3 Geraden liegen, die sich in einem Punkt schneiden. Sind 5 der Veränderlichen bekannt, so gestattet diese Eigenschaft die Konstruktion der sechsten. Außer dem zuerst genannten werden

weitere Sonderfälle mit zusammenfallenden Geraden und zusammenfallenden Leitern betrachtet.

Theodor Zech (Darmstadt).

Gehman, H. M.: Complex roots of a polynomial equation. Amer. Math. Monthly 48, 237—239 (1941).

Hinweise auf die graphische Behandlungsmöglichkeit und Diskussion quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen. Rehbock (Braunschweig).

Bitterlich-Willmann, J.: Zum Verfahren der schrittweisen Näherung. Z. angew. Math. Mech. 21, 124—125 (1941).

Die Lösung des Anfangswertproblems $y'' + F(x)y = 0$ mit $y(c) = 1$, $y'(c) = 0$ wird nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen in der Gestalt $y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$ durch Berechnung von y_n aus y_{n-1} gewonnen. Unter der Voraussetzung, daß $F(x)$ stetig und von einerlei Vorzeichen ist, nehmen die Absolutbeträge $\left| \frac{y_i(x)}{y_{i-1}(x)} \right|$ bei festem x für wachsendes i monoton ab. Bricht man die Reihe für y beim Gliede y_n ab, so kann der Rest durch eine Formel, die nur y_{n-1} und y_n benutzt, abgeschätzt werden.

Collatz (Karlsruhe).

Mikeladze, Sch.: Verallgemeinerung der Methode der numerischen Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe der Formeln der mechanischen Quadratur. Trav. Inst. Math. Tbilissi 7, 47—63 u. dtsh. Zusammenfassung 62—63 (1940) [Russisch].

Für das von J. F. Steffensen entwickelte Verfahren zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das von der Lagrangeschen Interpolationsformel ausgeht und die Werte des Integrals y und der Ableitungen $y^{(k)}$ an äquidistanten Stellen benutzt, leitet Verf. allgemeine Formeln ab, indem er auf $y^{(k)}(a \pm \alpha h)$ die Taylorsche Formel anwendet. Insbesondere erhält er eine Quadraturformel der Gestalt

$$y^{(k)}(a + \alpha h) \pm y^{(k)}(a - \alpha h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{1 \pm (-1)^\lambda}{\lambda!} \alpha^\lambda h^\lambda y^{(k+\lambda)}(a) \\ + \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} \sum_{i=0}^r c_i [y^{(n)}(a + t_i h) + y^{(n)}(a - t_i h)] + R,$$

wo $t_i = \frac{i}{\alpha}$ ist und c_i von n, k, α , nicht aber von der Funktion $y(x)$ abhängt. Der Rest R ist von der Ordnung $n + 2r - k + 2$ in h . Durch verschiedene Wahl von k, n, r und α wird eine Reihe von speziellen Formeln erhalten. Ferner werden Formeln abgeleitet, die den Übergang zu kleineren Intervallen im Laufe des Rechenprozesses erleichtern. Ein Kriterium zur Prüfung der Genauigkeit der nach dieser Methode erhaltenen Werte wird mit Hilfe der Simpsonschen Formel abgeleitet. Zahlenbeispiele.

Wassilij Höfding (Berlin).

Thorne, C. J., and J. V. Atanasoff: A functional method for the solution of thin plate problems applied to a square, clamped plate with a central point load. Iowa State Coll. J. Sci. 14, 333—343 (1940).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie eine Anzahl von Näherungsmethoden zur Lösung von Problemen, die auf lineare Differentialgleichungen führen, in ein sehr allgemeines Schema eingeordnet werden können, das von den Verff. als „functional method“ bezeichnet wird. Beispielsweise sind die Verfahren von Boussinesq (Théorie de la chaleur. I. 1901, S. 314), Ritz [J. reine angew. Math. 135, 1—61 (1909)] und Trefftz [Math. Ann. 100, 503 (1928)] in dieser Methode enthalten, die in einer ihrer möglichen Formen zur numerischen Ermittlung der Durchbiegungen und Momente einer ringsum eingespannten, quadratischen Platte, die in ihrem Mittelpunkt eine Einzellast trägt, angewandt wird. Die Ergebnisse stimmen mit den durch andere Verfahren erhaltenen Resultaten sehr gut überein. [In Gl. (28) auf S. 337 soll der letzte Ausdruck der dritten Zeile lauten: $A_9(x^8 + y^8)$].

Gran Olsson (Trondheim).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Barbilian, D.: Zur Axiomatik der projektiven ebenen Ringgeometrien. 1. Tl. Jber. Deutsche Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 179—229 (1940).

Barbilian, D.: Zur Axiomatik der projektiven ebenen Ringgeometrien. 2. Tl. Jber. Deutsche Math.-Vereinig. 51, Abt. 1, 34—76 (1941).

Nach einigen heuristischen Überlegungen legt der Verf. die Grundbegriffe einer ebenen projektiven Ringgeometrie folgendermaßen fest: Es sei O ein sog. Z-Ring, ein Ring mit Einselement, in dem ein Element a immer entweder zweiseitig regulär oder zweiseitig singulär ist, d. h. in dem für a die beiden Gleichungen $ax = 1$ und $ya = 1$ entweder beide lösbar oder beide unlösbar sind. Unter der Modulargruppe \mathfrak{M}_0 werden die endlichen Produkte der Transformationen

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

mit τ, ε_i aus O , ε_i regulär, verstanden. Zu einer Klasse x werden mit einem Tripel (x_1, x_2, x_3) alle Tripel $(x_1\varrho, x_2\varrho, x_3\varrho)$, ϱ regulär, gerechnet. Als Punkt wird jede Klasse bezeichnet, die durch eine Transformation aus \mathfrak{M}_0 in $x^1 = (1, 0, 0)$ übergeführt werden kann. Unter einer Geraden wird jede Klasse y vom Typ $(\varrho y_1, \varrho y_2, \varrho y_3)$ verstanden, die durch eine Transformation aus der zu \mathfrak{M}_0 kontragredienten Gruppe \mathfrak{M}^0 in die Klasse $y^1 = (1, 0, 0)$ übergeht. y und x heißen inzident, wenn sie durch die Modulargruppe in y^1 und $x^2 = (0, 1, 0)$ übergeführt werden können. Wenn zwei Punkte durch \mathfrak{M}_0 in das Paar $x^2, x^3 = (0, 0, 1)$ transformiert werden können, so heißen sie klar zueinander; ist dies nicht möglich, so heißen sie spektral zueinander. — Unter der Gruppe \mathfrak{M}_i ($i = 1, 2, 3$) wird die Untergruppe aus den Transformationen der Modulargruppe \mathfrak{M}_0 verstanden, für die in der i -ten Zeile und Spalte die vom Diagonalelement verschiedenen Elemente gleich Null sind. Ein Z-Ring heißt insbesondere ein C-Ring, wenn für ein Tripel (x_1, x_2, x_3) , das durch \mathfrak{M}_0 aus $(1, 0, 0)$ hervorgeht, jede Komponente x_k durch Anwendung einer Transformation aus \mathfrak{M}_i und einer Transformation aus \mathfrak{M}_j zu 1 reduziert werden kann ($i, j, k = 1, 2, 3$ in beliebiger Reihenfolge). Und O heißt noch spezieller ein V-Ring, wenn die eben genannte Eigenschaft für alle Tripel (x_1, x_2, x_3) gilt, für die das von x_1, x_2, x_3 erzeugte Linksideal gleich O ist. Wie sodann gezeigt wird, sind Beispiele für V-Ringe der Restklassenring eines Hauptidealrings nach der Potenz eines Primelements p^m , $m > 1$, die Hauptidealringe, in denen ein euklidischer Algorithmus gilt, alle Algebren mit Einselement. Über einem V-Ring kann man die Grundbegriffe der projektiven Geometrie in engerer Anlehnung an die Definitionen der Körpergeometrie, ohne Verwendung der Modulargruppe, definieren. Jedoch betrachtet der Verf. weiterhin den allgemeineren Fall der C-Geometrien. — Zunächst werden die elementaren Inzidenztatsachen für die in der angegebenen Weise definierten Geometrien über den C-Ringen entwickelt. Es muß jeweils berücksichtigt werden, ob die gegebenen Punkte und Geraden klar oder spektral zueinander sind; nur für zwei zueinander klare Punkte gilt der Satz, daß sie eine Gerade bestimmen, usf. Sind A und B zwei Punkte, so gibt es auf jeder Geraden durch B eine endliche Kette von Punkten, in der der erste zu A , der letzte zu B und je zwei aufeinanderfolgende Punkte klar zueinander sind. — Sodann werden die Begriffe der Projektion und Semiprojektion eingeführt und die additiven und multiplikativen Desarguesschen Sechserwürfe als Sextupel von bezeichneten Punkten auf Sekanten vollständiger Vierecke erklärt. Wiederum sind Voraussetzungen über klare Lage eingeschlossen, so muß z. B. bei einem additiven Desarguesschen Sechserwurf die Sekante zu den Seiten und Diagonalen des Vierecks klar sein. Für beide Arten von Sechserwürfen gilt, daß durch fünf Punkte der sechste eindeutig festgelegt ist, und allgemeiner gilt für zwei multiplikative Desarguessche Sechserwürfe,

deren erste fünf Punkte einschließlich ihrer Bezeichnungen projektiv aufeinander bezogen sind, daß sie auch zugeordnete Endpunkte haben, und noch eine etwas allgemeinere Aussage für additive Desarguessche Sechserwürfe. Dies sind Formulierungen, in denen der Desarguessche Satz für die Ringgeometrien gilt. — Es wird dann aus dem vorliegenden Material an geometrischen Sätzen ein Axiomensystem der projektiven ebenen C -Geometrien angegeben, in dem neben der Inzidenz der Begriff der klaren Lage als Grundbegriff auftritt. Die Unabhängigkeit des Axiomensystems wird ausführlich bewiesen. Die Widerspruchsfreiheit wird daraus gefolgert, daß alle Axiome in der im ersten Teil der Arbeit entwickelten analytischen modularen Geometrie über einem beliebigen C -Ring erfüllt sind. — In der axiomatischen Ebene wird dann eine Gerade g und auf ihr ein Punkt P gewählt. Für die Menge M der zu P klaren Punkte auf g wird dann mit Hilfe der additiven und multiplikativen Desarguesschen Sechserwürfe die Hessenbergsche Punktrechnung mit P als Pol eingeführt. Es ergibt sich ein Z -Ring O , der von der Wahl der Geraden g , des Punktes P und des Null- und Einspunktes unabhängig ist. Dann wird ein Viereck $P_0P_1P_2P_3$ von zueinander klaren Punkten als Bezugsmenge für die Einführung von Koordinaten gewählt. Zunächst lassen sich nur den zum Koordinatendreieck $P_1P_2P_3$ klaren Punkten und gewissen weiteren Punkten auf den Seiten dieses Dreiecks Tripel von Elementen aus O als Koordinaten zuordnen. Den übrigen Punkten werden mit Hilfe des Verfahrens der „Ringverlängerung“ Koordinaten zugeschrieben. Alle Punkte und Geraden werden so in der analytischen modularen Geometrie über O dargestellt. Nun erkennt man, daß O auch ein C -Ring ist. Nimmt man zu dem Axiomensystem als neues Axiom die Forderung hinzu, daß der Hessenbergsche Punktkalkül einem bestimmten C -Ring isomorph ist, so ist das Axiomensystem vollständig: Nach Wahl einer Bezugsmenge erhält jeder Punkt bzw. jede Gerade Koordinaten aus der modularen analytischen Geometrie über diesem C -Ring, und Koordinatentransformationen werden durch $x^* = (\alpha)x^S$ dargestellt, wo (α) eine Transformation der Modulargruppe und S ein äußerer Isomorphismus des Ringes ist. — Zum Schluß wird untersucht, welche Rolle die Geometrien über V -Ringem unter den Geometrien über C -Ringem spielen. Zu speziellen V -Geometrien gelangt man, wenn man verlangt, daß die Kette von klaren Punkten, die zwei beliebige verbindet, stets nur ein einziges Zwischenglied enthält. Schließlich wird ein Axiom angegeben, das die Geometrien über Algebren aussondert.

Bachmann (Marburg, Lahn).

Elementargeometrie:

Watson, G. N.: An inequality in the triangle. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **11**, 273—276 (1940).

P sei ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ; AP, BP, CP mögen BC, CA, AB in A', B', C' schneiden; dann ist wenigstens eins der Verhältnisse $AA':BC, BB':CA, CC':AB$ größer oder gleich $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, und zwar gilt dies sowohl von der Verhältniszahl, die im Nenner die kleinste Dreiecksseite, als auch von der, die im Zähler die größte der Strecken AA', BB', CC' enthält. Die Konstante kann nicht verbessert werden.

Harald Geppert (Berlin).

Cavallaro, Vincenzo G.: Sur la nouvelle géométrie du triangle. La configuration ayant pour éléments partiels la polaire trilinéaire du point de Lemoine et la distance brocardienne. *Bull. sci. École polytechn. Timişoara* **10**, 73—86 (1941).

Verf. gibt eine sehr große Zahl von Formeln an, durch die die verschiedenen Elemente der neueren Dreiecksgeometrie untereinander in Beziehung gesetzt werden: Wichtige Elemente als Funktionen des Halbmessers R des Umkreises und der Entfernung zwischen den Mittelpunkten des Feuerbachschen Kreises und der Brocardschen Ellipse, oder als Funktionen von R und α oder von R und β (α und β die Halbachsen der Brocardschen Ellipse) oder als Funktionen von α und β oder als Funktionen der Halbmesser der beiden Lemoineschen Kreise. Sodann untersucht Verf. die Be-

ziehungen dreier einander ähnlicher und ähnlich liegender Vierecke $O\Omega K\Omega'$, $OSTS'$, $OMGM'$ (O Umkreismittelpunkt, K Lemoinescher Punkt, Ω, Ω' die Brocardschen Punkte; S, S' die Schnittpunkte der Verlängerungen von $O\Omega, O\Omega'$ über Ω, Ω' hinaus mit dem Umkreis, T Schnittpunkt der Umkreistangenten in S und S' ; M, M' die Schnittpunkte der Verlängerungen von $O\Omega, O\Omega'$ mit der trilinearen Polare Δ von K, G Schnittpunkt der Lote auf OM, OM' in M, M' . $O\Omega K, O\Omega' K'$ sind bekanntlich rechtwinklige Dreiecke mit der gemeinsamen Hypotenuse OK). Das Ähnlichkeitsverhältnis zwischen dem ersten und dritten Viereck ist $\Omega\Omega':2\alpha$, das Ähnlichkeitsverhältnis zwischen dem ersten und zweiten Viereck ist $(\Omega\Omega')^2:(2\alpha)^2$. Die Beziehungen zwischen diesen drei Vierecken führen zu weiteren Formeln für wichtige Dreieckselemente. Es folgen Berechnungen der Halbmesser, Potenzen, Tangenten und Potenzlinien des Umkreises des Dreiecks und der Umkreise der betrachteten Vierecke und weitere Beziehungen zwischen den Mittelpunkten dieser Kreise und anderen Punkten. Zum Schluß gibt Verf. Anwendungen auf das von ihm schon früher [Mathesis 53, 155—160 (1939); dies. Zbl. 21, 347] untersuchte besondere Dreieck, in dem $\Omega\Omega'$ ein Maximum wird. In diesem fällt der Umkreismittelpunkt des dritten Vierecks mit K zusammen, und der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\Omega\Omega'$.

Max Zacharias (Berlin).

Ionescu-Bujor, C.: Über eine Transformation in einem Dreieck. Gaz. mat. 46, 563—568 (1941) [Rumänisch].

A', B', C' seien die Fußpunkte dreier durch einen Punkt M gehenden Eckenlinien des Dreiecks ABC . Auf den Seiten BC, CA, AB liegen die Punktpaare A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 , die den Doppelverhältnisgleichungen $(BCA_1A') = (CBA_2A')$, $(CAB_1B') = (ACB_2B')$, $(ABC_1C') = (BAC_2C')$ genügen. Werden A_1, B_1, C_1 als die Fußpunkte dreier durch einen Punkt M_1 gehender Eckenlinien gewählt, so gehen die entsprechenden Eckenlinien AA_2, BB_2, CC_2 durch einen Punkt M_2 . Solche Punktpaare nennt Verf. verallgemeinert invers bezüglich M . Man kann die Konstruktion des zu einem Punkt M_1 gehörigen Fußpunktdreiecks $A_1 B_1 C_1$ weiter fortsetzen, indem man zu M_1 das Fußpunktdreieck $A_2 B_2 C_2$ bezüglich $A_1 B_1 C_1$, dann das Fußpunktdreieck $A_3 B_3 C_3$ bezüglich $A_2 B_2 C_2$ usw. konstruiert. Man erhält so Fußpunktdreiecke des Punktes M_1 von beliebig hoher Ordnung. Ihnen entsprechen gewisse der obigen Transformation von M_1 in M_2 analoge Punkttransformationen höherer Ordnung, deren Eigenschaften Verf. untersucht.

Max Zacharias (Berlin).

Ramler, O. J.: On triangles having a common mean. Amer. Math. Monthly 47, 140—145 (1940).

Werden die komplexen Koordinaten α_i ($i = 1, 2, 3$) der Ecken des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ (bezüglich des Umkreismittelpunktes als Nullpunktes und des Umkreises als Einheitskreises) als die Wurzeln der kubischen Gleichung $t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0$ betrachtet, so sind nach P. Delens [Mathesis 51, 261—269 (1937)] die Koordinaten der Ecken des „mean“-Dreiecks $\sigma_1^{\frac{1}{3}}, \sigma_2^{\frac{1}{3}}, \sigma_3^{\frac{1}{3}}$, wo $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ist. Verf. untersucht die Beziehungen zweier Dreiecke mit gemeinsamem „mean“-Dreieck und zeigt den Zusammenhang einiger dieser Beziehungen mit Sätzen, die J. R. Musselman in seiner Arbeit: On the line of images [Amer. math. Monthly 45, 421—430 (1938); dies. Zbl. 19, 361] angegeben hat. Hier können nur zwei Ergebnisse angeführt werden. Es zeigt sich zunächst, daß zwei Dreiecke in demselben Kreis mit gemeinsamem mean wechselseitig orthopolar sind bezüglich des Mittelpunktes der Verbindungsstrecke ihrer Höhenpunkte als gemeinsamen Orthopols (d. h. der genannte Punkt ist der Orthopol irgendeiner Seite des einen Dreiecks bezüglich des andern). Ferner ergibt sich der Satz: Wenn zwei einem Kreis einbeschriebene Dreiecke eine gemeinsame Bilderlinie (line of images) für denselben Punkt T des Umkreises haben, so haben sie ein gemeinsames „mean“-Dreieck und eine gemeinsame einbeschriebene Parabel, deren Brennpunkt der Punkt T ist.

Max Zacharias (Berlin).

Ghițescu, Virgil: Über einen Streckenzug in Verbindung mit einem Dreieck. *Gaz. mat.* 46, 624—629 (1941) [Rumänisch].

Die Parallele zu der Seite BC eines Dreiecks ABC durch einen Punkt M_1 der Geraden AB schneide AC in M_2 . Die Parallele durch M_2 zu AB schneide BC in M_3 . Die Parallele durch M_3 zu AC schneide AB in M_4 . Die Parallele durch M_4 zu BC schneide AC in M_5 . Die Parallele durch M_5 zu AB schneide BC in M_6 . Dann schneidet die Parallele durch M_6 zu AC die Gerade AB wieder in dem Ausgangspunkt M_1 . Dieser Satz gilt, welche Lage auch der Anfangspunkt M_1 in der geraden Linie AB haben möge. Nach dem elementaren Beweis dieses Satzes untersucht Verf. die Änderungen des Flächeninhalts des Trapezes $M_1M_2M_3M_4$, wenn das Teilungsverhältnis $M_1A:M_1B = k$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Schließlich beweist Verf., daß bei Ersetzung der Parallelen durch die Antiparallelen zu den Seiten der entsprechenden Streckenzug sich ebenfalls schließt.

Max Zacharias (Berlin).

Tzitzeica, Gh.: Beziehungen zwischen den Elementen eines Tetraeders. *Bol. mat.* 14, 74—78 (1941) [Spanisch].

Verf. beweist elementar folgende Sätze: 1. Das dreifache Quadrat der Verbindungsstrecke einer Ecke eines Vierflachs mit dem Schwerpunkt der Gegenfläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Quadrate der von derselben Ecke ausgehenden Kanten und $\frac{1}{3}$ der Summe der Quadrate der drei anderen Kanten. — 2. Die Summe der Quadrate der Verbindungsstrecken der Ecken mit den Schwerpunkten der Gegenflächen ist gleich $\frac{1}{3}$ der Summe der Quadrate der Kanten des Vierflachs. — 3. Die vierfache Summe der Quadrate der Entfernungen des Schwerpunkts eines Vierflachs von den Ecken ist gleich der Summe der Quadrate der Kanten. — 4. Das Quadrat der Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenkanten eines Vierflachs ist gleich dem vierten Teil der Differenz zwischen der Summe der Quadrate der nicht von dieser Verbindungsline geschnittenen Kanten und der Summe der Quadrate der beiden geschnittenen Kanten. — 5. Die vierfache Summe der Quadrate der Verbindungsstrecken der Mitten der drei Paare von Gegenkanten ist gleich der Summe der Quadrate der Kanten. — Aus 3. und 5. folgt sofort 6. Die Summe der Quadrate der Entfernungen des Schwerpunkts von den Ecken ist gleich der Summe der Quadrate der Verbindungsstrecken der Mitten der drei Paare von Gegenkanten. — 7. Ist G der Schwerpunkt des Vierflachs $A_1A_2A_3A_4$, so schneiden die Kugeln $(GA_1A_3A_4)$, $(GA_1A_2A_4)$, $(GA_1A_2A_3)$ auf den Geraden A_1G , A_2G , A_3G , A_4G vier Sehnen l_1, l_2, l_3, l_4 aus, die der Gleichung $l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 + l_4m_4 = s$ genügen, in der m_1, m_2, m_3, m_4 die Verbindungsstrecken der Ecken mit den Schwerpunkten der Gegenflächen sind und s die Summe der Quadrate der Kanten bedeutet. — Zu diesen Sätzen bemerkt Ref.: 1. findet sich (unter versehentlichem Weglassung des Wortes „dreifache“) schon bei J. H. van Swinden, *Elemente der Geometrie*, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von C. F. A. Jacobi, S. 452, Nr. 955, Jena 1834; richtig bei H. Thieme, *Die Elemente der Geometrie*, S. 361, Leipzig 1909; 2. und 3. ebenfalls bei van Swinden, S. 452, Nr. 956, Nr. 957; 4. und 5. bei C. A. Bretschneider, *Beiträge zur Untersuchung der dreiseitigen Pyramide*, *Arch. Math. Phys.* 1, 1—9 (1841).

Max Zacharias (Berlin).

Delens, Paul: Sur la théorie du tétraèdre. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 211, 220—221 (1940).

Durch die Ecken eines Vierflachs $A_1A_2A_3A_4$ gehe ein hyperboloidischer Geradenvierer, dessen Geraden die Flächen des Vierflachs in je einem Punkt M_i schneiden. Der Geradenvierer bestimmt eine dem Vierflach umschriebene Quadrik φ , die Schnittpunkte M_i eine einbeschriebene, die Flächen des Vierflachs in den Punkten M_i berührende Quadrik P' . Schreibt man die Gleichungen der beiden Quadriken in entsprechenden Systemen von Tetraederkoordinaten, so kann man, wie Verf. an anderer Stelle beweisen will, durch den Übergang zu einem bevorzugten System von Koordinaten die Matrizen der Polaritäten φ und P' in die entsprechenden charakteristischen Formen bringen

$$\begin{pmatrix} 0 & m_3 & m_2 & m_1 \\ m_3 & 0 & m_1 & m_2 \\ m_2 & m_1 & 0 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_3 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 & 0 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch jede Ecke A_i des Vierflachs geht noch eine zweite Gerade von φ . Diese Geraden bilden einen zweiten hyperboloidischen Vierer, der die Flächen des Vierflachs in vier Punkten M'_i schneidet. Die Geraden $M_iM'_i$ bilden einen dritten hyperboloidischen Vierer in den Flächen des Vierflachs. Verf. hebt hervor, daß die obige Koordinatenbeziehung ein allgemeines Ordnungsprinzip für die Eigenschaften des Vierflachs darbietet und ferner eine neue Verbindung zwischen den Geometrien des Dreiecks und des Vierflachs gestattet, wenn man die betrachteten Punkt- und Geradenvierer durch Punkte (ξ) bzw. Geraden (m) in der Ebene eines dem Vierflach zugeordneten Dreiecks darstellt.

Zacharias (Berlin).

Delens, Paul: Sur certains éléments permutants du tétraèdre. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 273—275 (1940).

Die drei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders definieren drei windschiefe Involutionen, die zusammen mit der Identität eine Vierergruppe bilden. Verf. untersucht im Anschluß an eine frühere Arbeit (vgl. vorst. Ref.) Regelflächen 2. Ordnung, sowie Quadrupel von Punkten, Geraden und Ebenen, die gegenüber Transformationen dieser Gruppe invariant sind. *E. A. Weiss.*

Thébault, V.: Polygone de $2n$ côtés bordé de triangles isocèles semblables. Mathesis 54, 161—166 (1940).

Verf. teilt folgenden Satz von R. Bouvaist mit: Über den Seiten $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$ eines ebenen Sechsecks $A_1A_2 \dots A_6$ konstruiert man nach außen (oder nach innen) ähnliche gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel α und den Spitzen A'_1, A'_2, \dots, A'_6 . M_{14}, M_{25}, M_{36} seien die Mitten der Diagonalen A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 . Dann sind die Mitten $M'_{14}, M'_{25}, M'_{36}$ von $A'_1A'_4, A'_2A'_5, A'_3A'_6$ die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke mit dem Basiswinkel α , die nach außen (oder innen) über den Seiten des Dreiecks $M_{14}M_{25}M_{36}$ konstruiert werden. Verf. zeigt, daß der Satz vom Sechseck auf ein ebenes $2n$ -Eck ausgedehnt werden kann. Verf. beweist sodann noch folgende Verallgemeinerung: Teilen A_{12}, A_{43} die Seiten A_1A_2, A_4A_3 eines einfachen Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ in demselben Verhältnis k , und sind B_1, B_2, B die Spitzen direkt ähnlicher Dreiecke, die über den Seiten A_1A_4, A_2A_3 und über der Strecke $A_{12}A_{43}$ konstruiert werden, so teilt B die Strecke B_1B_2 im Verhältnis k . Setzt man $k = 1$, so kann man aus diesem Satz alle früheren folgern. Dem Verf. scheint es unbekannt zu sein, daß dieser Satz und damit auch die vorstehenden Sonderfälle längst bekannt sind. Sie sind enthalten in einem allgemeinen Satz über ähnliche ebene Systeme, der z. B. in dem Buch von J. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, 1879, S. 79, zu finden ist. *Max Zacharias.*

Oakley, C. O.: Equations of polygonal configurations. Amer. Math. Monthly 47, 621—627 (1940).

In dieser Abhandlung handelt es sich darum, Polygonzüge, auch solche mit unendlich langen Seiten, aber endlich vielen Ecken, durch eine Gleichung darzustellen. Verf.

verwendet dazu im Anschluß an V. Alaci 1. das Fourierintegral $A(L) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin L\alpha}{\alpha} d\alpha$, das den Wert $-1, 0, 1$ hat, je nachdem $L < 0, = 0, > 0$ ist; 2. die Integrale $\int_0^\infty L^n \cdot e^{-Lx} dx$,

$n = 1$ oder 2 ; 3. das größte in L enthaltene Ganze $[L]$, 4. den absoluten Betrag $|L|$ und kombiniert diese Operatoren, wie es zweckmäßig ist. Der Aufbau der Gleichungen mit ihrer Hilfe muß in der Abhandlung selbst nachgelesen werden. Ein weiteres Problem ist, auch die Punkte des durch den Polygonzug umschlossenen Polygons durch eine Gleichung darzustellen. Das dritte Problem endlich besteht in der Verallgemeinerung der beiden ersten auf nicht geradlinige Polygone. Auch dafür gibt Verf. Beispiele. *Fladt (Tübingen).*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Nyström, E. J.: Zwei Modelle zur Erläuterung des Dualitätsprinzips in der Ebene. Soc. Sci. Fennicae Comment. phys.-math. 11, 1—8 (1941).

„Wenn zwei Winkel bestimmter Größe sich um ihre Scheitel S_1 und S_2 drehen, und etwa der Schnittpunkt der linken Schenkel eine Gerade beschreibt, so zeichnet der Schnittpunkt der rechten Schenkel einen Kegelschnitt.“

„Wenn zwei Strecken bestimmter Größe sich auf ihren Trägern bewegen und die Verbindungsgerade der linken Endpunkte sich um einen festen Punkt dreht, so umhüllt die Verbindungsgerade der rechten Endpunkte einen Kegelschnitt.“

Verf. beschreibt zwei leicht herstellbare Demonstrationsmodelle zur Erzeugung

eines Kegelschnittnetzes und eines Kegelschnittgewebes auf Grund der beiden obigen Sätze. *E. Kruppa* (Wien).

Deaux, R.: Décompositions d'une homographie binaire. *Mathesis* 54, 155—161 (1940).

Es werden hier die verschiedenen möglichen Arten betrachtet, eine binäre Projektivität ω in ein Produkt $\omega_2 \omega_1$ zweier anderer Projektivitäten zu zerfallen. Solche Zerfällungen D von ω werden mit D_0, D_1, D_2 bezeichnet, je nachdem ω_1, ω_2 (und ω) keinen oder nur einen oder beide Doppelpunkte gemein haben. Verf. zeigt zunächst, wie alle Zerfällungen D gefunden werden können, sobald diejenigen von ihnen bekannt sind, in denen ω_1, ω_2 involutorisch sind. Man erhält z. B. alle Zerfällungen D_2 aus einer beliebigen Zerfällung $\omega = I_2 I_1$ von ω in zwei Involutionen I_1, I_2 , indem man $\omega_1 = I I_1, \omega_2 = I_2 I$ wählt, wo I eine beliebige mit ω harmonische Involution bedeutet. Ähnliches gilt für die Zerfällungen D_0 und D_1 . (Im Satze 4, der zur Bestimmung der Zerfällungen D_1 dient, ist die Bedingung, daß ω_3 den Punkt A_{12} in den Punkt A verwandelt, vollständig wegzustreichen; sie ist eine Wiederholung der Voraussetzung [5] des Satzes!). Als Anwendungen werden die drei Fälle betrachtet, in denen $\omega_1 \equiv \omega_2$ ist (Quadratwurzel aus ω), oder ω_1 und ω_2 parabolisch, oder ω_1 parabolisch und ω_2 involutorisch sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

Kárteszi, Franz: Über das System der gleichseitigen Hyperbeln, die eine Parabel hyperoskulieren. *Mh. Math. Phys.* 50, 27—34 (1941).

Deutsche Fassung der in dies. Zbl. 24, 275 besprochenen Arbeit.

Harald Geppert (Berlin).

Claeys, A.: Sur deux cubiques planes. *Mathesis* 54, 166—177 (1940).

Gheorghiu, Ad.: Eine Definition einer unikursalen Quartik. *Gaz. mat.* 46, 568—574 (1941) [Rumänisch].

In einer Ebene liege ein Kegelschnitt (G) und ein Paar von Geradenbüscheln (Δ) und (Δ') mit den Scheiteln O und O' , die projektiv aufeinander bezogen sind. Eine Gerade Δ' schneide (G) in m und n . Die Tangenten an (G) in m und n schneiden die entsprechende Gerade Δ in M und N . Durchläuft Δ' den Büschel (Δ'), so beschreiben M und N eine unikursale Quartik. Der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden Δ, Δ' der projektiven Büschel beschreibt einen Kegelschnitt (H), der (G) in vier Punkten schneidet. In diesen Punkten berührt die Quartik den Kegelschnitt (G). O ist ein Doppelpunkt der Quartik. Sind m_1, m_2 die Berührungspunkte der Tangenten von O an (G) und h_1, h_2 die Schnittpunkte der Geraden $O'm_1, O'm_2$ mit dem Kegelschnitt (H), so sind $O h_1, O h_2$ die Tangenten der Quartik in O . Ist δ die Konjugierte durch O' zu einer Geraden Δ des Büschels (Δ) bezüglich (G), so beschreibt der Schnittpunkt (Δ, δ) einen Kegelschnitt (J), der den Kegelschnitt (H) außer in O und O' in zwei Punkten p, q schneidet. Die Pole P, Q der Geraden $O'p, O'q$ bezüglich (G) sind Doppelpunkte der Quartik. Verf. untersucht die verschiedenen Möglichkeiten, dieselbe Quartik von anderen gegebenen Elementen aus zu bestimmen, und entwickelt weitere Eigenschaften der Kurve. *Max Zacharias* (Berlin).

Weiss, E. A.: Die Koppelkurve als Laguerresches Bild einer Hesseschen Korrespondenz. *Math. Z.* 47, 187—198 (1941).

G. T. Bennett hat auf analytischem Weg nachgewiesen, daß jede Koppelkurve (Punktbahn beim Kurbelgetriebe) das Laguerresche Bild einer Hesseschen Korrespondenz auf einer algebraischen Kurve 3. Ordnung k^3 ist. Verf. gibt für diesen Satz einen neuen Beweis, indem er zeigt, daß das Laguerresche Bild einer solchen Korrespondenz auf irgendeiner k^3 die kennzeichnenden Eigenschaften der Koppelkurve besitzt. Die hierbei verwendete rein synthetische Methode, die den geometrischen Kern des Sachverhalts frei von allem rechnerischen Beiwerk klar hervortreten läßt, gibt über die Gestalts- und Realitätsverhältnisse (Doppelpunkte, Brennpunkte usw.) genaueren Überblick als bisher und führt auch in sehr durchsichtiger Form zu einer erschöpfenden Darstellung der möglichen Ausartungsfälle. *H. Horninger*.

Cassity, C. Ronald: On the quartic del Pezzo surface. Amer. J. Math. **63**, 256—262 (1941).

Einige Bemerkungen über die allgemeinen normalen Flächen F^4 des vierdimensionalen Raumes. Es seien i, j, k, l, m die fünf Basispunkte des Linearsystems ebener Kurven 3. Ordnung, das die ebene Abbildung der Fläche F liefert. Aus den Koordinaten dieser Punkte leitet Verf. die Gleichungen von fünf besonderen Kurven f_i, f_j, f_k, f_l, f_m des Systems ab, welche die Eigenschaft besitzen, daß alle ∞^1 quadratischen Beziehungen, die sie miteinander identisch verbinden, die Form einer Quadratsumme aufweisen; dieser Rechnung entspricht im vierdimensionalen Raume eine Koordinatentransformation, die die Spitzen der fünf durch F hindurchgehenden quadratischen Kegel als neue Fundamentalpunkte der Koordinaten wählt. Es werden auch diejenigen quadratischen Beziehungen angegeben, die nur vier der fünf Polynome f enthalten. Verf. stellt sich dann auf den reellen Standpunkt, und beweist noch, daß die elliptischen und die hyperbolischen Punkte der Fläche F in diejenigen Teile von F fallen, die bzw. von fünf und von vier Geraden der Fläche umrandet werden. *E. G. Togliatti.*

Sintzov, D.: Die durch mehrere bilineare Konnexen bestimmten Konfigurationen. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 6, 3—31 u. dtsh. Zusammenfassung 32 (1941) [Russisch].

Verf. untersucht, frühere Ergebnisse aus seinen und anderer Autoren Arbeiten zusammenfassend und wiederholend, die gemeinsamen Elemente von mehreren bilinearen Konnexen im binären, ternären und quaternären Gebiet. *B. Petkantschin.*

Algebraische Geometrie:

Purcell, Edwin J.: Space Cremona transformations of order $m + n - 1$. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 243—245 (1941).

C, C' sind zwei Raumkurven der Ordnungen n, m ; d und d' sind zwei windschiefe Geraden, die C in je $n - 1$ Punkten und C' in je $m - 1$ Punkten treffen; die Geraden, die C, d und diejenigen, die C', d' treffen, bilden zwei Strahlenkongruenzen 1. Ordnung. Es seien α, β und γ, δ die Punkte, in denen C, d und C', d' von den Geraden der beiden Strahlenkongruenzen getroffen werden, die durch einen Punkt P des Raumes hindurchgehen. Läßt man dem Punkt P den Punkt $P' \equiv \alpha\delta \cdot \beta\gamma$ entsprechen, so erhält man die im Titel genannten Transformationen der Ordnung $n + m - 1$. Gleichungen und geometrische Beschreibung der Transformation. Zwei verschiedene Fälle, je nachdem die Quadriken Q, Q' , die offenbar C, C' enthalten, verschieden sind oder zusammenfallen. Den besonderen Fall, in dem C, C' identisch sind, hat Verf. schon behandelt (dies. Zbl. **24**, 277). Den anderen Fall, in dem d, d' identisch sind, hat schon D. Montesano von einem anderen Standpunkte aus betrachtet [Ist. Lombardo, Rend., II. s. **21**, 688—690 (1888)]. Schließlich einige Ausartungen. *E. G. Togliatti (Genova).*

Cunningham, A. B.: Non-involutorial space transformations associated with a $Q_{1,2}$ congruence. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 309—312 (1941).

Es wird hier die Strahlenkongruenz Γ betrachtet, deren Geraden einen Kegelschnitt r und eine r schneidende Gerade s treffen. Es sind noch zwei projektive Flächenbüschel F, F' der Ordnungen $n + m + 1, n' + m' + 1$ gegeben; r, s liegen auf allen Flächen F mit den Multiplizitäten n, m und auf allen Flächen F' mit den Multiplizitäten n', m' ($n \leq m + 1, n' \leq m' + 1$). Ist dann P ein Punkt des Raumes, so gehen durch P eine einzige Gerade G von Γ und eine einzige Fläche F hindurch; die entsprechende Fläche F' schneidet G in einem Punkt P' , der nicht auf r, s liegt; P, P' entsprechen sich in der hier betrachteten Transformation. Gleichungen und geometrische Beschreibung (ohne die Beweise zu entwickeln) der Transformation in den drei möglichen Fällen: I) $n = m + 1, n' = m' + 1$; II) $n < m + 1, n' < m' + 1$; III) $n = m + 1, n' < m' + 1$. *E. G. Togliatti (Genova).*

Gandin, Renato: Intorno ad un problema di geometria numerativa ed alla sua interpretazione funzionale. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **10**, 69—80 (1939).

In einem Raume S_r gibt es i. a. eine endliche Anzahl von Räumen S_{r-2} , die eine

gegebene Kurve C_p^n (der Ordnung n und des Geschlechts p) i -mal schneiden und $2r - i - 2$ Geraden allgemeiner Lage je einmal treffen. Die Treffpunkte jener Räume mit C_p^n bilden auf C eine Gruppe Z_i , die folgendermaßen ausgedrückt werden kann: $Z_i \equiv a_i G - b_i K$; hier bedeuten G die Gruppe der Schnittpunkte von C mit einer Hyperebene und K eine kanonische Gruppe von C ; die Koeffizienten a_i, b_i sind numerische Funktionen von n, p, r, i . Diese Äquivalenzformel wird hier durch Induktion nach i bewiesen. Der Beweis wird auf die Betrachtung einer geeigneten Korrespondenz auf der Kurve C gegründet; unter den Doppelpunkten der Korrespondenz finden sich die Punkte der Gruppe Z_i ; daraus und durch eine Anwendung des Cayley-Brillschen Korrespondenzprinzips erschließt man die gewünschte Formel. Man erhält auch eine Rekursionsformel zur Bestimmung der Funktionen a_i, b_i ; so kann man auch die Anzahl N_i der betrachteten S_{r-2} angeben: $iN_i = na_i - 2(p-1)b_i$. Die wirkliche Bestimmung von a_i, b_i verlangt ziemlich lange Rechnungen kombinatorischen Charakters. — Im Falle $i = 2r - 2$ hat man eine Formel, die mit einer anderen von G. Castelnuovo angegebenen Formel [Palermo Rend. 3, 20 (1889)] äquivalent ist. — Das hier angewendete Verfahren ist auf einer Untersuchung von A. Comessatti begründet [Atti R. Istit. Veneto 69, 871—881 (1910)]. *E. G. Togliatti* (Genova).

Morin, Ugo: *Sulle serie intersezioni complete sopra una superficie algebrica.* Atti Accad. Italia, VI. s. 2, 289—293 (1941).

Verf. antwortet auf eine Frage, die Severi in seinen im Druck befindlichen Vorlesungen (Serie, sistemi di equivalenza ecc. [Pubblicazione dell'Istituto Mat. dell'Università di Roma]) aufgeworfen hat; sie betrifft den Beweis dafür, daß es unmöglich wäre, die Operation der Summe für Äquivalenzscharen auf einer allgemeinen algebraischen Fläche F einzuführen, falls man sich auf die Klasse der elementaren Scharen beschränkte, die vollständige Schnitte darstellen, d. h. derjenigen Scharen von Punktgruppen, die bis auf evtl. Festpunkte als Schnitte von Paaren linearer Kurvensysteme auf F hergestellt werden können. Das Ergebnis des Verf. lautet: Notwendig und hinreichend dafür, daß auf F die Summe zweier vollständiger Schnittscharen (im oben erklärten Sinne) gänzlich in einer Schar der gleichen Art enthalten sei, ist die, daß F rational oder halbrational, d. h. einer Regelfläche birational äquivalent, sei. Die hinreichende Bedingung stützt sich auf den vom Verf. bewiesenen Satz, demzufolge auf einer Regelfläche jede unirationale Schar gänzlich in einer vollständigen Schnittschar enthalten ist. *E. Martinelli* (Roma).

Eger, Max: *Sur la jacobienne d'un système de Pfaff.* C. R. Acad. Sci., Paris 211, 156—158 (1940).

Zweck dieser Mitteilung ist, folgende Formel zu beweisen:

$$J \equiv K_\lambda (1 + \Omega_0)(1 + \Omega_1) \cdots (1 + \Omega_\lambda).$$

J ist die Jacobische Mannigfaltigkeit von $\lambda+1$ Differentialformen 1. Art $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_\lambda$ auf einer algebraischen V_n ; K_λ bedeutet die kanonische V_λ von V_n ; Ω_i ist die Gesamtheit der Polarmannigfaltigkeiten von ω_i . Den Sinn des symbolischen Produkts hat Verf. in früheren Arbeiten erklärt (dies. Zbl. 15, 272; 16, 41; 21, 38; 22, 391). Im besonderen Falle, wo $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_p$ die Differentiale von $p+1$ rationalen Funktionen sind, findet man wieder eine vom Verf. schon angegebene Formel. Als Anwendung kann man die Beziehung finden, die die kanonischen V_λ von zwei V_n, \bar{V}_n verbindet, wenn zwischen den Punkten von V_n, \bar{V}_n eine algebraische Korrespondenz $(\alpha, 1)$ besteht.

E. G. Togliatti (Genova).

Turri, Tullio: *Calcolo del numero base reale delle varietà abeliane reali.* Atti Ist. Veneto Sci. etc. 97, Pt 2, 159—183 (1938).

Verf. berechnet die reelle Basiszahl \bar{q} einer reellen Abelschen Mannigfaltigkeit V_p ($p > 1$). Wesentliche Hilfsmittel der Untersuchung sind: a) ein Satz von Lefschetz, nach welchem die Riemannsche Matrix ω einer reellen V_p sich auf eine bestimmte Form transformieren läßt; b) der Satz, daß \bar{q} gleich der Anzahl der linear

unabhängigen prinzipalen Nullsysteme von ω ist, die von der Involution J mit der charakteristischen Gleichung $(1 - \lambda)^p(1 + \lambda)^p = 0$ in sich transformiert werden; c) die Bemerkung von Comessatti, daß, unter Benutzung der reellen Integrale erster Gattung, die Matrix ω durch die lineare unimodulare Substitution, die der Involution J entspricht, in die komplex-konjugierte transformiert wird; d) die Struktur der Multiplikabilitätsgruppe der Matrix ω , so wie sie in einer früheren Abhandlung des Verf. [Rend. Circ. mat. Palermo **60**, 129—160 (1936); dies. Zbl. **19**, 54] bestimmt wurde. Nennt man ϱ die komplexe Basiszahl, so findet man, nach Turri, folgende Ergebnisse: (a') Ist ω frei von isolierten Achsen, und haben ihre reinen Pseudoachsen den Charakter 1, so ist $\bar{\varrho} = \varrho = \frac{1}{2}w(w+1)f$, wo f die Anzahl der isolierten Pseudoachsen ist, in denen die Multiplikabilitätsgruppe die Räume der ersten Schar einer Segreschen Mannigfaltigkeit mit erstem Index $w-1$ invariant läßt; (b') ist w frei von isolierten Achsen, und haben ihre reinen Pseudoachsen den Charakter zwei, so ist $\varrho = w^2f$, $\bar{\varrho} = \frac{1}{2}w(w+1)f$, wo f die Anzahl der isolierten Pseudoachsen ist, in denen die Multiplikabilitätsgruppe die $(w-1)$ -dimensionalen Räume der ersten Scharen von zwei konjugiert-komplexen Segreschen Mannigfaltigkeiten invariant läßt; (c') besitzt ω zwei isolierte Achsen, die von J unter sich vertauscht werden, so ist $\bar{\varrho} = \frac{1}{2}\varrho$. Auf diese drei Fälle kann man sich immer beschränken.

Conforto (Roma).

Vektor- und Tensorrechnung, Kinematik:

● Bouligand, G., et G. Rabaté: *Initiation aux méthodes vectorielles et aux applications géométriques de l'analyse à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des élèves des facultés des sciences*. 2. édit. Paris: Libr. Vuibert 1940. 279 pag. ffrs. 65.—.

Die Schrift ist dazu bestimmt, den Studenten mit der Vektorrechnung und ihren Anwendungsmöglichkeiten in Geometrie und Mechanik vertraut zu machen. Die Vektorrechnung wird dabei anschaulich begründet. Der Theorie der freien Vektoren samt der linearen analytischen Geometrie folgt die der längs ihrer Richtung verschiebbaren Vektoren, d. h. die Theorie der Momente, und einiges über lineare Komplexe. Das nächste Kapitel behandelt die Differentialgeometrie der Kurven mit vektoriellen Mitteln. Nun besprechen Verf. die Punktfunktionen des R_3 und ihre Gradientfelder und gelangen zu einem der Vektorrechnung fremderen Thema, nämlich der geometrischen Deutung der Integration (Inhalt, Schwerpunkt, Arbeit), der vektoriellen Formulierung des Stokesschen und Greenschen Satzes und schließlich einem ausführlichen Abschnitt über Differentialgleichungen an Hand geometrischer Aufgaben. Das letzte Kapitel handelt von der Differentialgeometrie der Flächen bis zur Krümmungstheorie einschließlich. Angefügt sind eine nette Aufgabensammlung und einige weiterführende Noten, die sich u. a. auf besondere Kurven oder Flächen (Rollkurven, Schraubenlinien, Kegelschnitte, Ennepersche Fläche) sowie eine Einführung in die klassische Mechanik beziehen. — Das Buch ist mit viel Liebe zur Geometrie in klarer einfacher Darstellung geschrieben; zahlreiche, im einzelnen ausgeführte Beispiele.

Harald Geppert (Berlin).

Sgarbazzini, Carlo: *Sui quadrangoli articolati*. Period. Mat., IV. s. **21**, 177—192 (1941).

Verf. stellt die wichtigsten bekannten Eigenschaften der ebenen Gelenkvierecke nochmals im Zusammenhange dar. Insbesondere behandelt er die Unterscheidung der Arme eines Kurbelgetriebes in Kurbeln und Schwingen, die Zusammenhangsverhältnisse der für ein solches Getriebe im Reellen möglichen Bewegungen und die Frage nach den Vierecken größten und kleinsten Flächeninhaltes bei gegebenen Seitenlängen.

Wilhelm Schmid (Dresden).

Benedikt, E. T.: *Deduzione elementare della formula di Rodriguez*. Bol. mat. **14**, 67—69 (1941).

Verf. leitet die schon von L. Euler angegebenen, von O. Rodrigues wiedergefundenen Formeln, die die Koordinaten eines Punktes in einem starren, räumlichen

System nach einer Drehung um eine Achse durch die Koordinaten des Punktes vor der Drehung ausdrücken, mit Hilfe der Vektorrechnung in einfacher Weise neuerdings ab.

Wilhelm Schmid (Dresden).

Marussi, A.: *Moti rigidi infinitesimi sulla sfera*. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 14, 53—64 (1941).

Verf. betrachtet die möglichen, unendlich kleinen Bewegungen von starren Figuren auf der Kugeloberfläche. Er zeigt, daß jede solche Bewegung (ebenso wie jede endliche Bewegung) als Rotation um einen Kugelpunkt dargestellt werden kann. Als Parameter wählt man daher für solch eine Bewegung am besten Länge und Breite dieses Kugelpunktes sowie den Betrag der Verlagerung. Verf. gibt an, um wieviel sich Länge und Breite eines beliebigen Punktes bei einer solchen Verlagerung ändern. Besonders interessiert er sich für den geometrischen Ort aller Punkte, deren Änderung in Länge oder Breite konstant ist. Diesen nennt er Isotransitive (nach A. Giuducci). Die Isotransitiven in Breite sind die Meridiane, die in Länge sind Kreise, die durch den Pol gehen (die Tatsache, daß die Isotransitiven in Länge Kreise sind, scheint Verf. zu entgehen). Ihre Lage ist von der Breite des Drehungspunktes der Verlagerung unabhängig. Schließlich deutet Verf. praktische Anwendungen für diese Isotransitiven an.

G. Schrutka (Hamburg).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● Julia, Gaston: *Cours de géométrie*. Paris: Gauthier-Villars 1941. VIII, 508 S. frfs. 300.—.

Das Buch enthält die Vorlesungen über Geometrie, die Verf. seit 1937 an der École Polytechnique abhält. Es ist abgefaßt in Verbindung und in engem Zusammenhang mit den Cours d'Analyse, de Mécanique, de Physique, und hat, wie im Vorwort auseinandergesetzt wird, zwei Hauptziele: 1) die Studierenden mit den modernen Methoden vertraut zu machen sowie ihnen die Nützlichkeit dieser Methoden zu zeigen, und 2) die Anschauung, die Urteilskraft, den Sinn für Feinheit und Eleganz zu entwickeln, was durch Vergleich dieser verschiedenen Methoden, ihrer Vorteile und Nachteile, durch die beste Wahl der Methode erreicht wird. Die großen Geometer an der Ecole Polytechnique von O. Bonnet bis G. Humbert haben das ideale Vorbild geschaffen, dem der Verf. folgt. — Inhalt: 1) Elementare Theorie der Vektoren und Tensoren (Schreibweise in Vereinbarung mit den Vertretern der Mechanik und Physik). 2) Kinematik I. Kinematik des Punktes und festen Körpers. Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Geometrische Anwendungen (Roberval und Poincaré). Endliche Bewegung eines festen Körpers bei Kenntnis seiner augenblicklichen Bewegung: Methode des beweglichen Trieders. 3) Infinitesimale Geometrie I: Kurventheorie. Analytische Darstellung der Kurven. Ihre differentiellen Elemente der ersten Ordnung. Theorie der Berührung. Enveloppen. Berührungstransformationen. Geradenfamilien mit einem, zwei und drei Parametern. Tangente, Schmiegunskreis und -kugel, Frenetsche Formeln einer Raumkurve mit Anwendungen. Studium einiger spezieller Kurven: Schraubenlinie, Bertrandsche und sphärische Kurven. Normalenkongruenz einer Raumkurve. 4) Kinematik und kinematische Geometrie II: Vertieftes Studium der Bewegung eines festen Körpers. Bewegung einer ebenen Figur. Bewegung eines festen Körpers mit einem Fixpunkt. Allgemeinste Bewegung eines festen Körpers. 5) Infinitesimale Geometrie II: Flächentheorie. Allgemeine Eigenschaften der Flächen und der auf ihnen gezogenen Kurven. Krümmungslinien. Konjugierte Netze. Haupttangentenkurven. Anwendung auf die Geradenkongruenzen. Normalenkongruenzen. Singuläre Geraden der allgemeinen Kongruenzen. Abbildung der Flächen aufeinander. Abwickelbare Flächen. Konforme Abbildung. Imaginäre Elemente. 6) Vektorielle und tensorielle Analysis.

Volk (Würzburg).

Goormaghtigh, R.: *Solution géométrique des problèmes fondamentaux de la géométrie intrinsèque plane*. Mathesis 54, 178—182 (1940).

φ bezeichne den Kontingenzwinkel im laufenden Punkt M einer ebenen Kurve C ;

in bezug auf Tangente Mx und positiv gerichtete Normale My werden die Koordinaten x, y eines Punktes P gemessen; sind sie gegebene Funktionen von φ , so beschreibt also P eine Kurve Γ . Errichtet man im Krümmungsmittelpunkt μ von C das Lot μz auf $M\mu$, so daß $My, \mu z$ ebenso orientiert sind, wie Mx, My , so wird der Punkt P' , der bezüglich der Achsen $\mu y, \mu z$ die Koordinaten $x'(\varphi), y'(\varphi)$ hat, als abgeleiteter Punkt zu P bezeichnet; durch ihn geht die Normale in P an Γ . Läßt man in ähnlicher Weise wie P einen Punkt Q eine weitere Kurve Γ' mit dem Parameter φ beschreiben, so besitzt die Verbindungsgerade PQ entsprechender Punkte eine Hülle, die sie im Ähnlichkeitszentrum zwischen \overline{PQ} und der Projektion von $\overline{P'Q'}$ auf PQ berührt. Davon lassen sich zahlreiche Anwendungen machen, z. B. zur Konstruktion von Tangente und Krümmungszentrum einer Kurve in Polarkoordinaten. *Harald Geppert.*

Foster, Malcolm: Note on autopolar curves. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 247—253 (1941).

Untersuchungen vorwiegend elementarer Natur über ebene Kurven, die bezüglich der Parabel $2\eta = \xi^2$ autopolar sind. Z. B. stellt $f[f'(x)] + f(x) - x'f'(x) = 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Autopolarität der Kurve $y = f(x)$ dar. Unter den Integralkurven einer bei der Transformation $x = Y', y = XY' - Y, y' = X, y'' = 1/Y''$ invarianten Gleichung erster (zweiter) Ordnung gibt es im allgemeinen eine endliche Anzahl (∞^1) von autopolaren Integralkurven. Beispiele.

O. Borůvka (Brünn).

Hamilton, H. J.: Notes on curvature of curves and surfaces. Amer. Math. Monthly **47**, 613—620 (1940).

Ziel der Arbeit ist die Gewinnung neuer Grenzwertformeln für die Krümmung ebener Kurven und das Gaußsche Krümmungsmaß in einem elliptischen Flächenpunkte, die zugleich die Möglichkeit einer Verallgemeinerung des klassischen Krümmungsbegriffs bieten. Man definiert: Eine ebene Kurve hat in ihrem Punkte O eine Krümmung k , wenn sie sich in der Umgebung von O bei geeigneter Achsenwahl in der Form $y = f(x)$ mit $f(0) = f'(0) = 0$ und endlichem $f''(0)$ darstellen läßt; dann ist $k = |f''(0)|$ zu setzen. Ist bei dieser Darstellung C die Länge der die Punkte $(h_1, f(h_1)), (h_2, f(h_2))$ verbindenden Sehne, A der algebraische Inhalt der Fläche zwischen ihr und der Kurve, $h_1 < 0 < h_2$, so ist auch $k = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} (12AC^{-3})$; dieser Grenzwert existiert zuweilen auch

dann, wenn die benutzte Krümmungsdefinition versagt, und bietet so die Möglichkeit zu ihrer Erweiterung. Bei einer Fläche spricht man in ihrem Punkte O von der G -Krümmung, wenn sie sich durch geeignete Achsenwahl daselbst auf die Form $z = f(x, y)$ mit stetigem $f(x, y)$ bringen läßt und $F(r) = F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ die Bedingungen erfüllt: $F(0) = F'(0) = 0$ für alle θ , $F''(0)$ existiert gleichmäßig, stetig in θ

und ist endlich; dann ist die G -Krümmung gleich $2\pi \left[\int_0^{2\pi} F''(0)^{-1} d\theta \right]^{-1}$; das Gaußsche

Krümmungsmaß ist ihr Quadrat. Begrenzt die Ebene $z = l$ mit der Fläche in der Umgebung von O das Volumen V , und ist A die Fläche des in ihr liegenden Randstückes, so ist die G -Krümmung durch $\lim_{l \rightarrow 0} (4\pi VA^{-2})$ gegeben, und dieser Limes kann noch existieren, wenn die obige Definition der G -Krümmung versagt. *Harald Geppert.*

Geppert, Harald: Sopra una caratterizzazione della sfera. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **20**, 59—66 (1941).

Für jede geschlossene, auf einer Kugel oder Ebene gelegene Kurve C verschwindet die „Gesamtwindung“, d. h. das längs C erstreckte Integral über die Kurvenwindung. Umgekehrt sind Kugel und Ebene die einzigen Flächen, für welche die Gesamtwindung jeder darauf gelegenen geschlossenen Kurve verschwindet. — Dem von W. Scherrer [Vschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 40—46 (1940); dies. Zbl. **23**, 267] gegebenen Beweis dieser Sätze fügt Verf. zwei neue Beweise hinzu. Im ersten Beweis der Umkehrung wird gezeigt, daß eine Fläche, für welche längs jeder geschlossenen

Kurve das Integral über die geodätische Windung verschwindet, aus lauter Nabelpunkten bzw. Flachpunkten bestehen muß, woraus sich mit Hilfe des allgemeinen Zusammenhangs zwischen geodätischer und gewöhnlicher Windung die Behauptung ergibt. Im zweiten Beweis wird mit Hilfe des Schmiegeparaboloids direkt die Gesamtwindung einer gewissen Schar von geschlossenen Kurven berechnet; das geforderte Verschwinden der Gesamtwindung für alle Kurven der Schar führt dann zu dem ausgesprochenen Satz.

H. Thomas (Darmstadt).

Haag, J.: Lignes asymptotiques d'une surface représentée par une fonction harmonique. Bull. Sci. math., II. s. 65, 100—103 (1941).

$f(\zeta) = P(x, y) + iQ(x, y)$ sei eine analytische Funktion von $\zeta = x + iy$. Auf der Fläche $z = Q(x, y)$ erhält man dann die Asymptotenlinien, falls man $\int \sqrt{f'(\zeta)} d\zeta = U(x, y) + iV(x, y)$ setzt, durch $U(x, y) = \text{const}$ und $V(x, y) = \text{const}$. Auf der „konjugierten“ Fläche $z = P(x, y)$ werden die Asymptotenlinien durch $U \pm V = \text{const}$ bestimmt. Beispiele.

Harald Geppert (Berlin).

Bouligand, Georges: Sur les asymptotiques des surfaces réglées. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 415—417 (1941).

Bouligand, Georges: Familles de courbes sur certaines surfaces. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 634—636 (1941).

Verf. betrachtet in der ersten Arbeit einen zwischen zwei Erzeugenden liegenden Streifen S einer Regelfläche, in dem der Drall sein Vorzeichen nicht ändert und von Null verschieden ist. Die von den Erzeugenden verschiedenen Asymptotenlinien des Streifens S sind nur definiert, wenn in den Gleichungen von $S(x = a(t)z + p(t); y = b(t)z + q(t))$ die zweiten Ableitungen von a, b, p, q existieren. Verf. zeigt, daß sich die Definition erweitern läßt, für den Fall, daß nur die ersten Ableitungen existieren. Der Streifen S wird als Grenzwert ($n = 0$) einer Folge von Streifen S_n dargestellt. Auf jeder Fläche S_n existieren die zweiten Ableitungen. Die Asymptotenlinien von S werden als Grenzlage derjenigen von S_n definiert. — In der zweiten Mitteilung wird allgemein der Begriff der Asymptotenlinien, der Krümmungslinien und anderer Flächenkurven auf die Grenzfläche S einer Flächenfolge S_n ausgedehnt, derart, daß auf jeder S_n die üblichen Voraussetzungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfüllt sind, aber nicht auf der Grenzfläche S . An einigen Beispielen wird gezeigt, daß zur Gewinnung eindeutiger Ergebnisse auf S noch gewisse Zusatzbedingungen zu stellen sind. Insbesondere werden Flächen betrachtet, die von der Kurvenschar $y = y(x, u); z = z(x, u)$ erzeugt werden, derart daß die zweiten (bzw. die ersten) Ableitungen nach u nicht existieren.

Haack (Karlsruhe).

Alt, Wilhelm: Über die Minimalflächen vom Liouvilleschen Typus. Deutsche Math. 5, 513—521 (1941).

Verf. stellt sich die Aufgabe, alle reellen Minimalflächen zu bestimmen, auf welchen reelle Liouvillesche Kurvensysteme existieren, deren Quadrat des Bogenelementes sich also auf die Liouvillesche Form

$$ds^2 = (U(u) + V(v)) \cdot (du^2 + dv^2)$$

bringen läßt. In einer ersten Untersuchung geht er aus von der Eigenschaft, daß die Minimalflächen Translationsflächen ihrer Minimalkurven sind; in einer zweiten von den Weierstraßschen Formeln der reellen Minimalflächen. Beide Untersuchungen führen auf Funktionalgleichungen mit komplizierter Konstantenbestimmung, die aber durch eine Kombination der beiden Untersuchungswege sich umgehen läßt. Das Ergebnis ist, daß die auf Rotationsflächen abwickelbaren reellen Minimalflächen die einzigen reellen Minimalflächen sind, auf welchen ein reelles Liouvillesches Kurvensystem existiert. Die Ebene ist die einzige reelle Minimalfläche, auf der mehr als ein reelles Liouvillesches Kurvensystem existiert.

Volk (Würzburg).

Bompiani, E.: Intorno alle varietà isotrope. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 20, 21—58 (1941).

Die Probleme der analytischen Differentialgeometrie, insbesondere also die der Theorie

isotroper Mannigfaltigkeiten komplexer euklidischer n -dimensionaler Räume S_n beginnen dort, wo die Formeln der reellen Theorie versagen. Während nun im komplexen Gebiet aus dem Verschwinden des Quadrates eines Vektors oder aus dem einer Gramschen Determinante nicht mehr auf das Verschwinden dieses Vektors selbst oder auf die lineare Abhängigkeit der diese Gramsche Determinante bestimmenden Vektoren geschlossen werden kann, bleiben so grundlegende Begriffe wie der der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren (oder Punkten) wegen ihres affinen (bzw. projektiven) Charakters auch gegenüber allen Ausnahmeerscheinungen im Bereiche der analytischen Differentialgeometrie komplexer euklidischer Räume in Geltung. — Das erste Verdienst der vorliegenden Arbeit ist denn auch, die wichtige Rolle projektiver Gesichtspunkte für die Entwicklung der analytischen Differentialgeometrie (auch im Rahmen der komplexen Bewegungsgruppe) in Evidenz zu setzen. Dabei stützt sich Verf. auf die lange Reihe seiner Untersuchungen zur Theorie k -dimensionaler Mannigfaltigkeiten in n -dimensionalen (im allgemeinen euklidischen) Räumen, deren Hauptergebnisse er in der Preisschrift „Geometrie Riemanniana di specie superiore“ (dies. Zbl. **11**, 418) zusammengefaßt hat. — Den Ausgang bilden die Schmiegräume $S(0), S(1), S(2), \dots, S(\nu - 1)$ einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_k im euklidischen S_n . $S(0)$ ist ein allgemeiner Punkt mit Ortsvektor \mathfrak{x} auf V_k , $S(1)$ der k -dimensionale, von den ersten Ableitungen \mathfrak{x}_α aufgespannte Tangentialraum im Punkt P , $S(2)$ der von den ersten und zweiten Ableitungen \mathfrak{x}_α und $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ aufgespannte 2-Schmiegrau usw. Die Grenzwerte der Abstände eines Punktes P' aus einer Umgebung von P auf V_k von $S(0), S(1), \dots, S(\nu - 1)$ lassen sich durch ν invariante Differentialformen erster Ordnung und $2, 4, \dots, 2\nu$ -ten Grades ausdrücken. Diese Fundamentalformen charakterisieren die Riemannschen Geometrien der Gattung $1, 2, 3, \dots, \nu$ unabhängig von der Einbettung der V_k . Zwei Mannigfaltigkeiten V_k und \bar{V}_k , welchen gleiche erste ν Formen zukommen, heißen abwickelbar von der Gattung ν . — Den Zusammenhang dieser „Riemannschen Geometrien höherer Gattung“ mit der von J. Lense und dem Ref. entwickelten Theorie isotroper Mannigfaltigkeiten vermittelt der vom Verf. geprägte Begriff der Darstellungsmannigfaltigkeit W_k zweier aufeinander abwickelbarer Mannigfaltigkeiten V_k in S_n und \bar{V}_k in $S_{\bar{n}}$. Die n ersten Koordinaten $x^j (u^1, \dots, u^k)$ der Darstellungsmannigfaltigkeit W_k sind die der V_k , die letzten \bar{n} sind die mit der imaginären Einheit multiplizierten Koordinaten der \bar{V}_k . Die projektiven Eigenschaften der W_k hängen allein von der Dimension $N = n + \bar{n}$, aber nicht von der Art der Zerspaltung in die Dimensionen n bzw. \bar{n} ab. Mit Hilfe der Darstellungsmannigfaltigkeit W_k kann man jetzt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Abwickelbarkeit ν -ter Gattung zweier Mannigfaltigkeiten V_k und \bar{V}_k in die Form:

$$(d\mathfrak{x})^2 = (d^2\mathfrak{x})^2 = \dots = (d^\nu\mathfrak{x})^2 = 0$$

setzen. Mit anderen Worten: die Darstellungsmannigfaltigkeit von V_k und \bar{V}_k ist ν -fach isotrop. In diesem Falle verschwindet die $(\nu + 1)$ -te Fundamentalform nicht mehr identisch, wohl aber in gewissen Richtungen der Mannigfaltigkeit. Die Bestimmung dieser $(\nu + 1)$ -fach isotropen Richtungen einer ν -fach isotropen Mannigfaltigkeit kann mit den vom Verf. gegebenen projektiven Hilfsmitteln durchgeführt werden und führt insbesondere im Falle isotroper Flächen ($\nu = 1$) zu einer Reihe bemerkenswerter projektiver Fallunterscheidungen. — Nach einer genauen Diskussion der geometrischen Bedeutung der $(\nu + 1)$ -ten Fundamentalform für eine ν -fach isotrope Mannigfaltigkeit, sowie der Elemente $(\nu + 1)$ -ter Ordnung längs ihrer Nulllinien behandelt Verf. die isotropen Regelflächen. Der Klassifikation der isotropen Regelflächen liegen die folgenden projektiven Fallunterscheidungen zugrunde: (a) $S_o(1) = S_3$, d. h. der zwei benachbarte Erzeugende (allgemeiner Lage) enthaltende lineare Raum $S_o(1)$ ist dreidimensional; (b) $S_o(2) = S_3, S_4, S_5$, d. h. drei benachbarte Tangential- S_3 der Fläche (in Punkten allgemeiner Lage) gehören zu einem S_3 bzw. S_4 bzw. S_5 ; (c) $S_o(2) = S_4$ als Sonderfall, für den die Tangential- S_3 die Schmiegräume einer Kurve darstellen. Für die isotropen Regelflächen mit $S_o(1) = S_3$ gilt notwendig $n \geq 6$. Für die isotropen Regelflächen des S_n mit $S_o(2) = S_4$ gilt notwendig $n \geq 7$. Die allgemeinste (nichtabwickelbare) isotrope Regelfläche mit $S_o(2) = S_5$ erhält man, indem man in einem Raum von der Dimension $n \geq 7$ die Erzeugenden dieser Regelfläche in den Schmiegeebenen längs einer dreifach isotropen Kurve wählt. Demgegenüber existieren isotrope Regelflächen mit $S_o(2) = S_5$ (für die Verf. gleichfalls ein Konstruktionsverfahren wie auch eine analytische Darstellung gibt) bereits in S_6 . — Neben dieser Klassifikation der isotropen Regelflächen untersucht Verf. weiterhin das Verhalten der zweiten Fundamentalform auf diesen Flächen, insbesondere die Beziehungen der Nulllinien dieser Fundamentalform zu den Erzeugenden der Flächen. Speziell gilt: auf einer isotropen Regelfläche mit $S_o(2) = S_4$ fallen alle zweifach isotropen Kurven mit den Erzeugenden zusammen. Die Untersuchungen dieses Abschnittes (§ 2) haben zahlreiche Berührungspunkte mit den Arbeiten und Ergebnissen von J. Lense (dies. Zbl. **20**, 164; **23**, 73), wenn man sich auf den Fall $\nu = 1$ beschränkt. Darüber hinaus entwickelt Verf. auch eine Theorie mehrfach isotroper Regelflächen in S_n , insbesondere den Fall $\nu = 2$. Auch dafür hat Verf. die erforderlichen projektiven Hilfsmittel in einer früheren Arbeit bereitgestellt [vgl. E. Bompiani, Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi; Rend. Circ. mat.

Palermo 37, 297—331 (1914)]. Hier ($\nu = 2$) handelt es sich um die Fallunterscheidungen:

$$(a) S_9(1) = S_3, \quad S_9(2) = S_4; \quad (b) S_9(1) = S_3, \quad S_9(2) = S_6, \quad S_9(3) = S_6; \\ (c) S_9(1) = S_3, \quad S_9(2) = S_6, \quad S_9(3) = S_7$$

und um das Verhalten der 3. Fundamentalform (6. Grades) und ihrer Nulllinien zu den Flächen-erzeugenden. — In einem weiteren Abschnitt (§ 3) untersucht Verf. projektive Beziehungen und Eigenschaften gewisser von Ref. angegebener einfach isotroper Flächen, die keine Regel-flächen sind (vgl. dies. Zbl. 15, 415; 18, 171; 22, 397). Das erste dieser Beispiele, eine total-isotrope (d. h. im Sinne der Terminologie des Verf. einfach isotrope) Fläche des S_7 , die Ref.

seinerzeit aus der Integration der Mongeschen Differentialgleichung $\sum_{i=1}^7 dx_i^2 = 0$ gewonnen hatte,

deutet Verf. (durch Projektion einer F^9 eines S_9 auf einen S_7) als rationale Fläche siebenter Ordnung F^7 in S_7 . Diese Fläche, deren eine Projektion auch auf die Veronesesche Fläche führt, trägt zwei Systeme totalisotroper Kegelschnitte (in isotropen Ebenen gelegen), die durch die Projektion der F^9 des S_9 aus zwei Systemen von Kurven dritter Ordnung entstehen. Durch passende Projektion der F^7 auf einen S_6 entsteht in diesem eine Fläche mit dreifachem ebenen Hauptkurvennetz, das ein dreifaches Kegelschnittssystem darstellt. Zwei dieser Hauptkurven-systeme bestehen aus totalisotropen Kegelschnitten, das dritte aus Kreisen (nicht, wie Ref. seinerzeit behauptet hatte, aus hypersphärischen Kurven mit isotropen Hauptnormalen!). — Das zweite dieser Beispiele betrifft ein anderes von Ref. gefundenes partikuläres Integral der

Gleichung $\sum_{i=1}^7 dx_i^2 = 0$, nämlich eine totalisotrope Fläche F^7 des S_7 , die mit der des ersten

Beispiels eng verwandt ist. Die Projektion auf S_6 führt hier auf eine Fläche, deren Hauptkurven in zwei Kegelschnittssysteme und ein System kubischer Kurven zerfallen. Damit berichtigt Verf. ein Versehen des Ref., der (in der zweiten oben zitierten Arbeit) für dieses dritte Kurvensystem zu einem anderen Ergebnis gekommen war. — Eine andere Projektion einer F^9 des S_9 auf S_7 (auch das zweite Beispiel kann so gewonnen werden) führt auf ein drittes, vom Ref. zuerst angegebenes Beispiel, und zwar wieder auf eine F^7 in S_7 . Ihre Projektion auf S_6 liefert ein Beispiel für eine Fläche mit einem vierfachen Hauptkurvensystem, das sich aus einem Kegelschnittdoppelsystem und einem einfachen kubischen Kurvensystem, sowie aus zwei weiteren Kegelschnittssystemen zusammensetzt. Während der Fläche längs des Doppel- und des kubischen Systems ein fester Tangential- R_4 zukommt, trifft dies für die beiden anderen Kegelschnittssysteme nicht zu. — Zwei weitere Beispiele isotroper Flächen in S_6 , die Ref. gefunden hatte, bieten Verf. Anlaß, auf einen interessanten Sonderfall der Zerspaltung gegebener isotroper Bogenelemente $ds^2 \equiv 0$ in zwei oder mehrere Bogenelemente (z. B. $ds^2 \equiv ds_1^2 + ds_2^2$), die selbst wiederum isotrop sind ($ds_i^2 \equiv ds_i^2 \equiv 0$), aufmerksam zu machen. In diesem Falle wird die Korrespondenz der Projektionsflächen (z. B. der mit der Metrik ds_1^2 und ds_2^2) völlig unbestimmt. Die beiden, den erwähnten Beispielen entsprechenden Flächen liegen beide bereits in einem S_7 des S_8 , doch ist die Metrik dieses S_7 nichteuklidisch, sofern es sich um Tangentialräume der absoluten Mannigfaltigkeit in S_8 handelt (Sonderfälle dieser Art wurden übrigens bereits von J. Lense zu Beginn der Untersuchungen auf diesem Gebiet bemerkt [vgl. J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante; Iber. Deutsche Math. Vereinig. 35, 280—294 (1926)]). Von den zahlreichen Ergebnissen (und Problemstellungen), die Verf. im Anschluß an die eben erwähnten Fallunterscheidungen gewinnt, kann mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum nicht weiter berichtet werden. Es sei nur noch kurz das Thema des letzten Abschnittes dieser eingehenden Untersuchung erwähnt (§ 4). Es handelt sich um eine Diskussion und Verallgemeinerung eines vom Ref. aufgestellten Projektionssatzes isotroper Flächen.

M. Pinl (Augsburg).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Green, Louis: Twisted cubics associated with a space curve. 2. Amer. J. Math. 63, 352—360 (1941).

Die Arbeit setzt eine frühere Untersuchung (dies. Zbl. 24, 347) fort, in der eine besondere einparametrische Kurvenfamilie betrachtet wurde, die dem System der ∞^2 Kurven 3. Ordnung angehörte, welche mit einer vorgegebenen Raumkurve Γ in einem ihrer Punkte O eine fünfpunktige Berührung eingehen. In vorliegender Arbeit wird zunächst festgestellt, daß jede Kubik des letztgenannten zweiparametrischen Systems eine einzige Fläche 2. Ordnung bestimmt, die sie enthält, und gleichzeitig mit Γ in O eine siebenpunktige Berührung eingeht; artet diese Fläche zweiter Ordnung nicht aus, so gibt es in dem System nur eine einzige weitere Kubik, die ebenfalls auf ihr liegt, und die beiden Kubiken werden als assoziiert bezeichnet. Ist hingegen die Quadrik

ein Kegel, so ist die Kubik zu sich selbst assoziiert; diese selbstassoziierten Kubiken und weitere spezielle Kurven des zweiparametrischen Systems werden vom Verf. weiter studiert.

Piero Buzano (Torino).

Rasmusen, R. B., and B. L. Hagen: Comments on canonical lines. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**, 298—302 (1941).

In einem Punkt P einer analytischen Fläche S gibt es ∞^2 algebraische Flächen dritter Ordnung, die mit S in P eine Berührung vierter Ordnung besitzen. Die Tangentenebene in P schneidet die kubischen Flächen in einer rationalen kubischen Kurve, deren Wendepunktgerade als kanonische Greensche Gerade bezeichnet wird. Verff. entwickeln die Gleichung dieser Geraden. Ferner wird eine zweiparametrische Schar von Flächen zweiten Grades angegeben, die S in P von zweiter Ordnung berühren. Die Geraden der beiden kanonischen Büschel von Davis sind polar-reziprok bezüglich jeder F_2 der Schar. In der Schar sind die Flächen zweiten Grades von Darboux und Davis enthalten.

Haack (Karlsruhe).

Bompiani, E.: Una questione sui doppi sistemi coniugati. *Atti Accad. Sci. Torino* **76**, 128—132 (1941).

Man betrachte im S_n eine Fläche mit dem laufenden Punkte x , die ein doppelt konjugiertes Netz (u, v) besitzt (und daher mindestens einer Laplaceschen Gleichung genügt): Es sei \bar{x} der Punkt, der ihre zweite Laplacesche Transformierte in einem bestimmten Sinne, z. B. in dem der v -Linien beschreibt. Verf. nimmt an, daß die Kongruenz der Geraden $x\bar{x}$ eine W -Kongruenz sei, und daß daher auch sie einer Laplaceschen Gleichung genügt. Diese Gleichung kann man in den x allein ausdrücken, vergleicht man sie mit derjenigen Gleichung, der nach Voraussetzung schon die Fläche x genügt, so folgt, ausgenommen den singulären Fall von lauter ebenen v -Linien, daß die untersuchte Fläche zwei verschiedenen Laplaceschen Gleichungen genügen und daher in einem S_3 ($n = 3$) liegen muß. Das Resultat des Verf. ist zum Teil eine Umkehrung eines Satzes von Backes [*Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **21**, 883—892 (1935); dies. Zbl. **13**, 36]: Wenn die Flächen x, X, \bar{x}, \bar{X} einen Zyklus von 4 Laplaceschen Transformierten in einem S_3 bilden, so sind die Kongruenzen $x\bar{x}$ und $X\bar{X}$ W -Kongruenzen.

Piero Buzano (Torino).

Mayer, O.: Sur les surfaces réglées. 4. Interprétation de l'arc projectif et des invariants h et j . *Ann. Sci. Univ. Jassy*, I: *Math.* **26**, 626—632 (1940).

Verf. gibt eine geometrische Deutung der projektiven Bogenlänge einer Regelfläche des gewöhnlichen Raumes (vgl. Fubini und Čech, *Geometria proiettiva differenziale*. Bologna 1926, S. 207). Ist M ein Punkt der Erzeugenden g , M' der Schnittpunkt der Berührungsebene von M mit der unendlich benachbarten Erzeugenden und M_1 der Schnittpunkt der Berührungsebene von M' mit g , so ist die Korrespondenz zwischen M und M_1 eine Projektivität P . Die projektive Bogenlänge einer allgemeinen Regelfläche ist absolut genommen der Hauptteil von $\sqrt{6 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right|}$, worin ε die Charakteristik von P bedeutet. Weiterhin gibt Verf. geometrische Deutungen der Invarianten h und j von Čech an (vgl. a. a. O., S. 208). Für h benutzt er dabei eines der Doppelverhältnisse, das die Fixpunkte von P mit den Inflexionsknoten bilden, für j hingegen die Charakteristik einer Projektivität P_1 , die dadurch aus P hervorgeht, daß man die Berührungsebenen in den Punkten von g durch die Ebenen ersetzt, die diese Punkte mit der Hauptgeraden verbinden. Im Falle von Regelflächen mit zusammenfallenden Inflexionsknotenlinien leitet Verf. geometrische Deutungen der projektiven Bogenlänge und der Invarianten l und j (vgl. a. a. O., S. 217) mittels der Charakteristiken der Projektivitäten P und P_1 sowie eines der Doppelverhältnisse, die von den Fixpunktpaaren von P und P_1 gebildet werden, her; weiterhin definiert er auf jeder Erzeugenden einen sog. Hauptpunkt, mittels dessen er eine neue Deutung der Hauptgeraden sowie weitere Eigenschaften gewinnt.

Mario Villa (Bologna).

Finikoff, S.: Congruences associées dans une déformation simultanée. Bull. Soc. Math. France **68**, 53—82 (1940).

Il presente lavoro si occupa delle corrispondenze fra congruenze di rette in relazione alla geometria proiettiva differenziale. — Siano date due congruenze di rette in corrispondenza generalmente biunivoca. Seguendo un criterio generale di Cartan, la coppia di congruenze si dirà deformabile del primo ordine se è possibile trovare un'altra coppia di congruenze in corrispondenza con la prima coppia tale che si corrispondano in una proiettività gli intorni del primo ordine di coppie di rette corrispondenti, senza che la seconda coppia sia proiettivamente identica alla prima (nel qual caso questa è indeformabile). — Se la coppia data di congruenze è generica essa è indeformabile (anche del primo ordine). L'A. dimostra che data ad arbitrio una congruenza si può associare ad essa un'altra, dipendente da tre funzioni arbitrarie di due variabili, che con la data formi una coppia deformabile (la seconda congruenza dicesi associata alla prima). — Stabilito questo l'A. si occupa delle particolari coppie di congruenze tali che i piani focali dell'una contengano i fuochi dell'altra (per coppie di rette corrispondenti). Se si congiungono i fuochi corrispondenti si ha un ciclo di quattro congruenze di cui due opposte diconsi in relazione T . Due congruenze in relazione T sono proiettivamente applicabili su quelle ottenute da esse per correlazione, quindi sono associate. Inversamente ed escluso questo caso, se una congruenza è in relazione T con l'associata essa è particolare e dipende da una funzione arbitraria di due variabili. Vengono poi esaminati vari casi speciali che offrono configurazioni particolarmente interessanti, fra le quali quella del teorema di permutabilità del Bianchi sulle trasformazioni asintotiche. Lo studio del caso in cui la deformabilità si estenda all'intorno del 2° ordine di una retta generica della prima congruenza o di tutt'e due pone in evidenza nuove proprietà delle congruenze W . — Hanno relazione con questo lavoro gli altri dell'A.: C. R. Acad. Sci., Paris, **189**, 177—178 (1934); questo Zbl. **9**, 408; Rend. Circ. mat. Palermo **53**, 314 (1929); Ann. Scuola norm. Pisa (2), **2**, 59. E. Bompiani.

Kasner, Edward, and John de Cicco: Families of curves conformally equivalent to circles. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 378—391 (1941).

Die Gesamtheit der ∞^3 Kreise der Ebene wird durch eine beliebige konforme Abbildung übergeführt in einen ebenen Kurvenkomplex Ω . Verff. bestimmen zuerst die Differentialgleichung des Komplexes Ω in isotropen Parametern und zeigen dann, daß ein Komplex Ω auf zwei Arten durch je drei differentialgeometrische Eigenschaften gekennzeichnet wird. Die zwei ersten seien angegeben: 1a) Durch ein Linienelement E gehen ∞^1 Kurven von Ω . Die Brennpunkte der Schmiegungsparabeln dieser ∞^1 Kurven liegen auf einer Lemniskate L , deren eine Doppelpunktstangente E ist. — 1b) Die Leitlinien der Schmiegungsparabeln umhüllen eine gleichseitige Hyperbel H , deren Mittelpunkt der Punkt P des Linienelements E ist. E selbst bestimmt eine Asymptote der Hyperbel. — 2a) Verff. kennzeichnen eine Lemniskate L durch ein Paar orthogonaler Kreise. Dreht sich E um P , so beschreiben die Mittelpunkte dieser Kreise eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt P . — 2b) Dreht sich E um P , dann beschreiben die Brennpunkte von H wieder eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt P . — Verff. beweisen noch einige ergänzende geometrische Eigenschaften und bestimmen ein hyperoskulierendes isothermes Netz eines Komplexes Ω . Haack.

Feld, J. M.: Differential and integral invariants of plane curves and horn angles. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 318—327 (1941).

Ein hornförmiger Winkel der Ordnung n wird von zwei sich in n -ter Ordnung berührenden analytischen Kurvenbögen der Gaußschen Ebene dargestellt; ein solcher von 1. Ordnung hat nach Kasner und Comenetz (dies. Zbl. **14**, 178; **18**, 236; **19**, 80) in bezug auf konforme Abbildungen zwei relative Invarianten 2. und 3. und eine absolute Invariante 3. Ordnung. Verff. gewinnt diese Resultate sofort aus den Transformationsformeln für $d^2z/d\bar{z}^2$ und für die Schwarzsche Ableitung $\{z, \bar{z}\}$ bei konformen Abbildungen der Ebene ($z = x + iy$ und \bar{z} längs einer Kurve genommen); hierbei er-

scheinen die Invarianten zunächst in komplexer Form,

$$\frac{d^2 z_2}{d\bar{z}_2^2} \frac{dz_2}{d\bar{z}_2} - \frac{d^2 z_1}{d\bar{z}_1^2} \frac{dz_1}{d\bar{z}_1}, \quad \{z_2, \bar{z}_2\} - \{z_1, \bar{z}_1\},$$

woraus man auch die Invarianz bei allgemeineren Abbildungen ersieht. — Der zweite Teil der Arbeit beschränkt sich auf die Invarianten gegenüber den linear-gebrochenen Abbildungen der Ebene. Die rekursiv definierten $(n+1)$ -ten Schwarzschen Ableitungen

$$\{z, \bar{z}\}_{n+1} = \frac{d^3}{d\bar{z}^3} \{z, \bar{z}\}_n / \{z, \bar{z}\}_n - \frac{5}{4} \left(\frac{d}{d\bar{z}} \{z, \bar{z}\}_n / \{z, \bar{z}\}_n \right)^2$$

erweisen sich als relative Differentialinvarianten $(2n+3)$ -ter Ordnung und $\int \{z, \bar{z}\}_n d\bar{z}^2$ als Integralinvarianten einer Kurve (für die niedrigste Ordnung führt dies z. B. auf die Liebmannsche Konformbogenlänge). Die Anwendung auf hornförmige Winkel $(2n+1)$ -ter bzw. $(2n+2)$ -ter Ordnung führt für diese auf eine relative Invariante $(2n+2)$ -ter bzw. $(2n+3)$ -ter Ordnung. Dobbrack (Berlin).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Thomas, T. Y.: The characterization of flat Riemann spaces as a boundary value problem. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **19**, 247—259 (1940).

Let y^α be the normal coordinates of a Riemann space R normalized to the extent that the components of the metric tensor have the values δ_β^α at the origin. The hypersurface $\sum y^\alpha y^\alpha - \varrho^2 = 0$ will be termed as a “(small) sphere S_ϱ ”. If $B_{\alpha\beta} = 0$ ($B_{\alpha\beta}$ being the contracted curvature tensor) then

$$\text{Volume of } S_\varrho = \varrho^{n-1} (K_0 + K_2 \varrho^2 + K_4 \varrho^4 + \dots)$$

where K_0 is the volume of the Euclidean sphere of unit radius and

$$K_2 = -\frac{B}{6n} K_0, \quad K_4 = -\frac{Q K_0}{120n(n+2)}$$

(B resp. Q is the scalar Gaussian resp. quadratic curvature of R). Using this result the author shows that if the components of the metric tensor have the Euclidean boundary values δ_β^α there is but one solution of the equations $B_{\alpha\beta} = 0$ with respect to which the coordinates will be normal. An invariant formulation of this problem has then been given: If $B_{\alpha\beta} = 0$ and if the volume of S_r in R (which is supposed to be of class C_4) equals the volume of the Euclidean sphere of radius r then the curvature tensor of R vanishes identically in the region interior to S_r . Hlavatý (Prag).

Nakae, Tatsuo: Sur un groupe de transformations d'éléments linéaires qui laissent $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ invariant. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **22**, 455—458 (1939).

Die allgemeine infinitesimale Punkttransformation wird durch Adjungieren der ersten Differentiale $(dx^1, \dots, dx^n) = (p^1, \dots, p^n)$ einmal erweitert und mittels der Transformation (L) : $x^i = \bar{x}^i$, $p^i = A_j^i(x^1, \dots, x^n) \bar{p}^j$ transformiert. Es werden die Bedingungen gesucht, unter denen die so erhaltene infinitesimale Transformation (T) die quadratische Form $g_{ij} p^i p^j = \sum_i (a_j^i p^j)^2$ invariant läßt. Das Ergebnis ist, daß

$A_j^i = a_j^i$ sein muß. Die infinitesimale Transformation (T) definiert dann eine Gruppe, die aus der Bewegungsgruppe durch die Transformation (L) hervorgeht.

R. Ullrich (Prag).

Yano, Kentaro: Concircular geometry. 3. Theory of curves. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 442—448 (1940).

Yano, Kentaro: Concircular geometry. 4. Theory of subspaces. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 505—511 (1940).

(See this Zbl. **24**, 81, 184.) If $u^v(s)$ is a curve with the arc length s then by using the method exposed by the author in his previous paper [Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **22**, 595—621 (1940); this Zbl. **24**, 81] one gets the Frenet-formulae in con-

circular geometry, namely

$$\eta^{\nu} = \frac{\delta u^{\lambda}}{\delta s}, \quad \eta^{\lambda} = \frac{1}{k} V^{\nu}, \quad \frac{D}{Ds} \eta^{\nu} = k \eta^{\nu}, \quad \frac{D}{Ds} \eta^{\nu} = -\eta^{\nu} \frac{a-1}{a-1} k + k \eta^{\nu} \frac{a}{a+1},$$

$$V^{\lambda} \equiv \frac{\delta^2 u^{\lambda}}{\delta s^2} + g_{\mu\nu} \frac{\delta u^{\lambda}}{\delta s} \frac{\delta^2 u^{\mu}}{\delta s^2} \frac{\delta u^{\nu}}{\delta s^2}. \quad (a = 3, 4, \dots, n, k = 0)$$

On the other side the equation of a geodesic circle of a V_n lying on a V_{n-1} (in V_n) may be expressed in terms of the tensors H and M [see K. Yano, Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 247—252 (1939); this Zbl. 22, 398] and this relation shows that if any geodesic circle of V_{n-1} may be regarded as a geodesic circle of the enveloping V_n then V_{n-1} is totally umbilical. — A concircular transformation of the metric of V_n is not in general concircular for a V_{n-1} in V_n . Using the notion of the induced connection in V_{n-1} one gets easily: The necessary and sufficient condition that a concircular transformation of the metric of V_n induces a concircular transformation on a subspace is $\varrho_{\mu} M^{\mu}_{jk} = 0$. (For the notation see the papers mentioned above.) In the following section the author establishes the relation between the concircular curvature tensor Z of V_n and the conformal Weyl-tensor for a V_{n-1} as well as the Codazzi-equations.

Hlavatý (Prag).

Yano, K., et St. Petrescu: Sur les espaces métriques non holonomes complémentaires. *Disquisit. math. et phys.*, Bucarest 1, 191—246 (1940).

Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'exposition des notions plus ou moins connues concernant des propriétés algébriques d'une V_n^m (et de son complément V_{n-m}^m) dans V_n , de sa connexion induite et de sa courbure. Chapitre III: Soient k_1, \dots, k_{n-1} resp. $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{m-1}$ les courbures d'une courbe dans V_n resp. dans V_n^m . Si cette courbe est une asymptotique d'ordre p on a $k_1 = \bar{k}_1, \dots, k_p = \bar{k}_p$. On trouve dans ce chapitre aussi l'étude des géodésiques suivant la méthode de Synge. Le chapitre IV est réservé à l'étude des espaces (non holonomes) totalement géodésiques de même que des hyperplans géodésiques. (Si l'on déplace parallèlement dans V_n , le long d'une courbe de V_n^m , un vecteur tangent [normal] à V_n^m , et ce vecteur reste tangent [normal] à V_n^m , V_n^m est dite un hyperplan géodésique.) La condition nécessaire et suffisante pour que V_n^m soit totalement géodésique resp. un hyperplan géodésique est

$$K_{ab}^i = 0, \quad \text{resp.} \quad K_a^i = 0.$$

K_{ab}^i étant le premier tenseur de courbure de V_n^m . Dans le dernier chapitre les auteurs exposent une interprétation de la théorie de Michal-Botsford en prenant comme base un espace non holonome totalement géodésique.

Hlavatý (Prag).

Bortolotti, Enea: Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali. *Atti Accad. Italia VI. s. 2*, 251—267 (1941).

In einem projektiven Raume P_n mit der Übertragung $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ (wo $\Gamma_{0\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$) sei eine Kurve $x^a(t)$ gegeben ($a = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, n$). Ihr Tangentialbild (l'immagine tangenziale) ist

$$(1) \quad y^{\alpha}(0|t) = \delta_0^{\alpha} + \left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{\delta^2 x^{\alpha}}{\delta t^2}\right)_0 \frac{t^2}{2!} + \left(\frac{\delta^3 x^{\alpha}}{\delta t^3}\right)_0 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

wobei $\frac{dx^{\alpha}}{dt}$ (mit beliebigem $\frac{dx^0}{dt}$) ein Punkt auf ihrer Tangente und δ das kovariante Differential ist. Liegt diese Kurve auf einer X_m , $x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^m)$, so kann man die Koeffizienten der Entwicklung (1) mittels $\frac{du^r}{dt}$, $B_0^{\alpha} = \delta_0^{\alpha}$, $B_r^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^r}$ und ihrer Ableitungen ausdrücken. Verf. benutzt diese Tatsache, um eine X_n^m ausfindig zu machen, welche die Elemente von k -ter Ordnung der Tangentialbilder aller Kurven im betrachteten Punkte enthält: Die gesuchte X_n^m sei mittels $n - m$ Hyperebenen

$$(2) \quad \dot{P}_{\alpha} = \dot{\varphi}_{\alpha} + \dot{\varphi}_{\alpha\beta} z^{\beta} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} z^{\beta} z^{\gamma} + \dots \quad (i = 1, \dots, n - m)$$

$$(3) \quad (z^{\alpha} = y^{\alpha} - \delta_0^{\alpha})$$

gegeben. Drückt man aus, daß die z^α , welche man aus (3) und (1) bekommt, nämlich $z^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{\delta^2 x^\alpha}{\delta t^2}\right)_0 \frac{t^2}{2} + \dots$ für alle Werte von t der Bedingungen $\overset{i}{P}_\alpha(z^\alpha + \delta_0^\alpha) = 0$, $\overset{i}{P}_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt} = 0$ genügen müssen, so bekommt man (für $k = 1, 2, \dots$) die Bedingungen für die φ aus (2). Auf diese Weise wird bewiesen, daß man P_n im betrachteten Punkte bis zur vierten Ordnung mit X_n^m approximieren kann. Die analoge Frage nach einer holonomen X_m . $F^i = \overset{i}{\Phi}_\alpha z^\alpha + \frac{1}{2} \overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta + \dots = 0$, kann in ähnlicher Weise gelöst werden, und es zeigt sich, daß man P_n bis zur zweiten Ordnung mittels holonomer X_m approximieren kann. Spezialfälle und Anwendungen werden angedeutet und untersucht.

Hlavatý (Prag).

Lichnerowicz, André: Les espaces à connexion semi-symétrique et la mécanique. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 328—331 (1941).

Une forme quadratique $ds^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$ et une forme linéaire non intégrable $\omega = J_\lambda dx^\lambda$ définissent une connexion semi-symétrique:

$$\Pi_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + J_\lambda A_\mu^\kappa - g_{\mu\lambda} J^\kappa.$$

Les géodésiques de cette connexion sont en mécanique relativiste les lignes de courant d'un fluide quelconque et en mécanique classique les trajectoires d'un système mécanique.

J. Haantjes (Amsterdam).

Cartan, E.: Die Geometrie der Differentialgleichungen dritter Ordnung. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. **1**, 3—33 (1941) [Spanisch].

Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung 3. Ordnung der Form (1) $y''' = F(x, y, y', y'')$ kann in die folgende Gestalt gebracht werden (2) $f(x, y, X, Y, Z) = 0$, wo X, Y, Z die Integrationskonstanten bezeichnen. (2) definiert in der (x, y) -Ebene eine dreiparametrische Familie von Integralkurven. Faßt man X, Y, Z als Punktkoordinaten in einem dreidimensionalen Raum auf, so definiert (2) in diesem Raum eine zweiparametrische Familie von Flächen S_{xy} , die als Integralfächen eines Systems partieller Differentialgleichungen aufgefaßt werden können. Zwei Gleichungen von der Form (2) sollen äquivalent heißen, wenn man von der einen zur anderen mittels einer analytischen doppelten Punkttransformation übergehen kann, die gleichzeitig in der (x, y) -Ebene und im (X, Y, Z) -Raum ausgeführt wird. Einer Klasse äquivalenter Gleichungen (2) entspricht eineindeutig eine Klasse von Differentialgleichungen (1), die bezüglich aller analytischen Punkttransformationen in der (x, y) -Ebene äquivalent sind. Cartan ordnet der Gleichung (2) einen Raum von linearen isotropen Elementen zu, um damit das Äquivalenzproblem zweier Gleichungen (2) oder zweier Gleichungen (1) auf ein Isomorphieproblem zweier im Cartanschen Sinne verallgemeinerter Räume zurückzuführen. — Die leitende Idee des Verfahrens ist die folgende. Im speziellen Falle der Gleichung $y''' = 0$ wird (2) zu folgender Gleichung:

$$y = \frac{1}{2} x^2 X + xY + Z,$$

und die Flächen S_{xy} sind Ebenen, die zu den Berührungsebenen des Kegels $Y^2 - 2XZ = 0$ parallel sind, d. h. sie können als isotrope Ebenen des pseudo-euklidischen Raumes gedeutet werden. Dann kann man zwischen der (x, y) -Ebene und dem (X, Y, Z) -Raum eine Korrespondenz herstellen, die folgende Elemente einander zuordnet: (3) Punkt (x, y) — isotrope Ebene, lineares Element — isotrope Gerade, Element 2. Ordnung — lineares isotropes Element, Integralkurve — Punkt (X, Y, Z) . Im Falle einer allgemeinen Gleichung (1) wird ihr ein Raum von isotropen linearen Elementen mit metrischem Zusammenhang zugeordnet derart, daß die Flächen S_{xy} die isotropen Ebenen dieses Raumes werden. Auch im allgemeinen Falle wird die oben gekennzeichnete Zuordnung (3) beibehalten, und diese übersetzt sich in Differentialbeziehungen, die nach Vorgabe der Gleichung (1) den ihr zugeordneten Raum von isotropen linearen Elementen vollkommen bestimmen und umgekehrt. — Geometrisch läßt sich dieser

Raum durch Eigenschaften der infinitesimalen Ähnlichkeit kennzeichnen, die jedem infinitesimalen Zykel von isotropen linearen Elementen zugeordnet wird. Es werden die folgenden drei bemerkenswerten Sonderfälle untersucht, in denen der (1) zugeordnete Raum aufgefaßt werden kann 1. als ein Raum isotroper Geraden, 2. als ein Raum isotroper Ebenen, 3. als Punktraum; im letzten Falle handelt es sich um einen Weylschen Raum, und die Gleichung (1) kann durch Differentiationsprozesse integriert werden.

Piero Buzano (Torino).

Humbert, Pierre: Sur certaines figures planes de l'espace attaché à l'opérateur A_3 . C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 530—531 (1940).

Die Arbeit schließt an die in dies. Zbl. **22**, 395 besprochene an. Zieht man von einem Punkte S aus nach drei Punkten A, B, C der x -Achse Strecken, so nennt Verf. diese Figur in seiner Geometrie ein „Dreieck“. Als „Höhe“ von A aus wird die Gerade mit dem Richtungsfaktor m , der $mm_2m_3 = -1$ erfüllt, bezeichnet, wo m_2, m_3 die Richtungsfaktoren von SB, SC sind; analog die Höhen von B und C aus; die Höhe von S aus fällt mit dem gewöhnlichen Lot auf die x -Achse zusammen. Dann gilt: Die vier Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Als „Mittellinie“ durch A bezeichnet man eine Gerade mit dem Richtungsfaktor μ derart, daß die Richtungen AS und ABC zu den Richtungen μ, m_2, m_3 im Sinne des Verf. (vgl. a. a. O.) harmonisch konjugiert sind; entsprechend die Mittellinien durch B und C ; die Mittellinie durch S ist bezüglich m_1, m_2, m_3 harmonisch konjugiert zu ABC . Dann gilt: Die vier Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Harald Geppert.

Devisme, Jacques: Sur quelques propriétés des trièdres d'Appell. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 43—45 (1941).

Fortsetzung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. **24**, 186). Ein Appellsches Trieder wird durch drei Vektoren e_i definiert, für die (1) $e_1^3 = e_2^3 = e_3^3 = -2e_1e_2e_3 = 1$, $e_i^2e_j = 0$ ($i \neq j$) gilt; es ist dann $de_i = \sum \omega_i^k e_k$ mit $\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$, $\omega_1^2 = \omega_3^3 = \omega_3^1$, $\omega_1^3 = \omega_2^1 = \omega_2^3$, während sich die Verschiebung des Triederscheitels M durch $dM = \sum \omega^r e_r$ ausdrückt. Beschreibt M eine Kurve, deren Tangentenvektor e_1 ist (also $\omega^2 = \omega^3 = 0$), und setzt man $\omega^1 = ds$, $\omega_1^2 = pds$, $\omega_1^3 = qds$, so bestimmt sich der Krümmungsradius durch: $R^{-3} = p^3 + q^3$. Sind $OXYZ$ und $Oxyz$ zwei Appellsche Trieder, so bestimmen auch die Ebenen XOx, YOy, ZOz ein solches Trieder; die Ebenen YOz, ZOy, XOx schneiden sich in einer Geraden $O\xi$, die mit den analog konstruierten Geraden $O\eta, O\zeta$ wieder ein Appellsches Trieder bildet; dieser Satz gibt die Möglichkeit der Konstruktion der ersten Humbertschen Normalen. — Das Differentialsystem $\frac{dx_i}{dt} = \sum \lambda_i^k(t) x_k$ ($i, k = 1, \dots, 3$) besitzt genau dann das Integral $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = \text{const}$, wenn $\lambda_1^1 = \lambda_2^2 = \lambda_3^3$, $\lambda_1^2 = \lambda_2^3 = \lambda_3^1$, $\lambda_1^3 = \lambda_2^1 = \lambda_3^2$ ist; dann lassen sich aus einer speziellen Lösung sofort zwei weitere Integrale gewinnen. — Ohne Beweise.

Harald Geppert (Berlin).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Deknatel, J.: Sur le lieu des points équidistants de deux ensembles. Bull. Soc. Math. France **68**, 41—52 (1940).

Anschließend an die Untersuchungen von J. Wolff (dies. Zbl. **12**, 35) untersucht Verf. den geometrischen Ort $F(E_1, E_2)$ jener Punkte, die von zwei Punktmengen E_1 und E_2 einen gleichen Abstand besitzen. Haben die beschränkten Punktmengen E_1 und E_2 einen positiven Abstand voneinander, so besteht $F(E_1, E_2)$ aus endlich vielen geschlossenen Jordanschen Kurven (bzw. aus Kurven, die durch reziproke Radien in solche transformierbar sind), die einander in endlich vielen Punkten schneiden; die vorkommenden Bögen besitzen in jedem Punkt beiderseitige Tangenten und die Richtungstangente dieser ist von beschränkter Schwankung. Ist umgekehrt ein F mit diesen Eigenschaften gegeben, so werden Punktmengen konstruiert, für welche $F = F(E_1, E_2)$ ist.

Georg Hajós (Budapest).

Guaresehi, Giacinto: Sulla rappresentabilità regolare di una varietà di Jordan a punti tutti semplici e spazio tangente variabile con continuità. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 107—109 (1940).

Eine elementare Bemerkung über die mit lauter im Sinne von Severi [Ann. Mat. pura appl., IV. s., 13, 1—35 (1935); dies. Zbl. 9, 308] einfachen Punkten und mit stetig variierender Tangentialebene versehenen Jordanschen Flächen. Es sei S eine solche, topologisch auf das Quadrat Q abgebildete Fläche. Man kann Q in endlichviele Rechtecke r_1, \dots, r_p so einteilen, daß sich die entsprechenden Flächenstücke s_1, \dots, s_p in passend gewählten Koordinatensystemen durch Gleichungen der Form $z = f_i(x, y)$, mit stetig differentierbaren $f_i(x, y)$, darstellen lassen. Der Satz gilt auch für die Jordanschen Mannigfaltigkeiten n -ter Dimension. *G. Scorza Dragoni* (Padova).

Burckhardt, Johann Jakob: Ein geometrischer Beweis des Satzes von Minkowski über konvexe Körper mit Mittelpunkt. (120. Jahresvers., Locarno, Sitzg. v. 28.—30. IX. 1940.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 110 (1940).

Vgl. J. J. Burckhardt, Über konvexe Körper mit Mittelpunkt, Fueter Festschrift Zürich 1940, 149—154, dies. Zbl. 23, 380. (In diesem Referat soll Z. 3 von unten E durch E ersetzt werden.) Die Note will eine Lücke dieser Arbeit beseitigen, die genaue Durchführung läßt sich aber aus ihr nicht entnehmen, auch eine Berichtigung der damaligen Fehlschlüsse findet nicht statt. *Bol* (Freiburg i. Br.).

Fiala, Félix: Sur les surfaces ouvertes à courbure positive. (120. Jahresvers., Locarno, Sitzg. v. 28.—30. IX. 1940.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 111 (1940).

Vgl. F. Fiala, C. R. 209, 821—823 (1939) (dies. Zbl. 24, 188). Die Note gibt neue Einzelheiten über die dort verwendete Beweismethode, die genaue Durchführung des Beweises soll aber erst später folgen. *Bol* (Freiburg i. Br.).

Angewandte Geometrie:

● **Sohn, F. W.:** The stereographic projection. New York: Chem. publ. Co. 1941. IX, 210 pag. \$ 4.00.

Rule, John T.: The geometry of stereoscopic projection. J. opt. Soc. Amer. 31, 325—334 (1941).

Verf. will praktische Regeln geben. Er unterscheidet drei Fälle: 1) die Aufnahmen werden mit parallel im Augenabstand aufgestellten Kameras hergestellt und mit ebenso stehenden Bildwerfern auf den Schirm projiziert; 2) die Aufnahmevorrichtungen stehen in anderem, meist kleinerem Abstände; 3) sie sind geneigt gegeneinander. Die Vorteile und Nachteile für jedes Verfahren werden auseinandergesetzt. *Hans Boegehold*.

Krames, Josef: Über bemerkenswerte Sonderfälle des „Gefährlichen Ortes“ der photogrammetrischen Hauptaufgabe. Mh. Math. Phys. 50, 1—13 (1941).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Mh. Math. Phys. 49, 327—354 (1941); dies. Zbl. 24, 272] gezeigt, daß die Rekonstruktion eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung neben der „Hauptlösung“, d. i. das ursprünglich abgebildete Objekt, noch eine oder zwei Nebenlösungen haben kann. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn das Objekt eine „orthogonale“ Fläche 2. Grades Ω ist, auf der die Augpunkte O_1, O_2 so liegen, daß sie zwei windschiefen, „adjungierten Erzeugenden“ e_1, e_2 angehören, d. h. daß e_1, e_2 die Achsen von zwei kongruenten Ebenenbüscheln sind, die Ω erzeugen. Zu jeder Lösung der Aufgabe gehört eine „ergänzende Lösung“, die aus ihr hervorgeht, indem man das eine der beiden Sehstrahlbündel um die Kernachse $[O_1 O_2]$ um 180° dreht. — Ist Ω ein orthogonales Hyperboloid und liegen O_1, O_2 auf dem durch die Hauptscheitel der Khelellipse gehenden Hauptschnitt von Ω symmetrisch zur Hauptachse der Khelellipse, so bilden die durch O_1 bzw. O_2 gehenden Erzeugenden zwei Paare adjungierter Erzeugender. Daher hat die Rekonstruktionsaufgabe in diesem Fall zwei Nebenlösungen. Es läßt sich nun zusätzlich die weitere Bedingung erfüllen, daß alle drei Lösungen kongruente Flächen Ω als Objekte liefern. Ebenso wie im allgemeinen Fall sind diese jedoch infolge der gegebenen Paarung der

Sehstrahlen in quadratischen Verwandtschaften einander zugeordnet. Auch die ergänzenden Lösungen können in die Frage nach kongruenten Lösungen einbezogen werden. Schließlich wird gezeigt, daß die Nebenlösungen der hier besprochenen Fälle in der photogrammetrischen Praxis leicht erkannt werden können. *E. Kruppa.*

Krames, Josef: Über die mehrdeutigen Orientierungen zweier Sehstrahlbündel und einige Eigenschaften der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades. *Mh. Math. Phys.* 50, 65—83 (1941).

Im Anschluß an den ersten Absatz des vorsteh. Referates kann die vorliegende Untersuchung folgendermaßen gekennzeichnet werden. Befinden sich die beiden Sehstrahlbündel in „orientierter Lage“, d. h. in einer solchen Lage, in der sich je zwei entsprechende Sehstrahlen in einem Punkt des dargestellten Objektes Ω schneiden, so kann man die Aufgabe stellen, aus dieser Hauptlösung die Nebenlösung dadurch herzustellen, daß man auf das Sehstrahlbündel (O_1) eine Drehung um eine durch O_1 gehende Achse d_1 und auf das Sehstrahlbündel (O_2) eine entsprechende Drehung um eine durch O_2 gehende Achse d_2 ausübt. Dabei sind die verschiedenen Lagen der Nebenlösung, die sich durch die ∞^1 Verdrehungen um die Kernachse und durch die ∞^1 Spiegelungen an den Ebenen durch die Kernachse ergeben, als nicht verschiedene Lösungen anzusehen. — Es wird gezeigt, daß die Achsenpaare d_1, d_2 vier Paare projektiver Strahlbüschel bilden, die zu zwei und zwei in zwei leicht angebbaren Ebenenpaaren liegen und im Normalriß auf eine zur Kernachse normale Ebene gleichsinnig kongruente Büschel ergeben. Die Zweideutigkeit der Rekonstruktionsaufgabe bedingt, daß das Objekt eine orthogonale Regelfläche 2. Grades Ω ist. Die Paare adjungierter Erzeugender bilden auf dem einschaligen Hyperboloid Ω in den beiden Erzeugendenscharen je eine hyperbolische Involution, deren Festelemente die durch die Hauptscheitel der Kehlellipse gehenden „Haupterzeugenden“ sind. Liegen O_1 und O_2 auf einer Haupterzeugenden e_s , so fällt die Hauptlösung mit der Nebenlösung zusammen, und die oben erklärten Drehungen um d_1 und d_2 werden infinitesimal, wobei die Achsenpaare d_1, d_2 zwei projektive Büschel bilden, in denen sich e_s selbst entspricht und deren Ebenen die Flächennormalen von O_1 und O_2 mit e_s verbinden. Auch die Besonderheiten, die eintreten, wenn Ω einfach singular wird, werden ausführlich besprochen. *E. Kruppa (Wien).*

Krames, Josef: Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „Gefährlichen Ort“. *Mh. Math. Phys.* 50, 84—100 (1941).

Diese Arbeit behandelt ebenso wie die im vorsteh. Ref. besprochene Untersuchung die Aufgabe, im Falle der Mehrdeutigkeit der photogrammetrischen Hauptaufgabe aus einer Lösung Ω mittels eines auf die Sehstrahlbündel auszuübenden Bewegungsvorganges die zweite Lösung Ω^0 herzustellen. In der früheren Arbeit wurden dabei die Bündelscheitel O_1, O_2 festgehalten. Da aber eine Verschiebung der Sehstrahlbündel in der Richtung der Kernachse $[O_1 O_2]$ nur eine ähnliche Verformung des Objektes bewirkt, ist die Bedingung einer festen Entfernung $\overline{O_1 O_2}$ unwesentlich. Es seien e_1, e_2 das Paar adjungierter Erzeugender von Ω , auf denen O_1 bzw. O_2 liegt, und ferner e_s, e_t die in der Erzeugendenschar (e_t) liegenden „Haupterzeugenden“ (s. vorsteh. Ref.). Es wird gezeigt, daß man von Ω zu Ω^0 gelangt, indem man auf das Bündel (O_2) die Drehung um e_s oder e_t ausübt, die e_2 mit e_1 zusammenfallen läßt. Die beiden sich so ergebenden Orientierungen liefern Ω^0 in den beiden sich „ergänzenden Lösungen“ (s. das dem vorigen Ref. vorangehende). Weiter wird untersucht, wie O_1 und O_2 auf Ω liegen muß, damit Ω^0 ein Paraboloid wird bzw. daß Ω^0 zu Ω ähnlich ausfällt. — Verf. behandelt auch die infolge der Paarung der Sehstrahlen zwischen Ω und Ω^0 bestehende quadratische Punktverwandtschaft konstruktiv in einem Normalriß auf eine Kreisschnittebene von Ω . *E. Kruppa (Wien).*

Hohenberg, Fritz: Annäherung von Kurvenbögen durch Kreisbögen. *S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa* 149, 145—156 (1940).

Um eine die x -Achse im Nullpunkt O berührende Kurve c mit der Gleichung $y=y_1(x)$ im Intervall $[0, \varepsilon]$ durch einen sie in O berührenden Näherungskreis $y=y_2(x)$ zu ersetzen,

bestimmt Verf. $y_2(x)$ durch das Minimum des Integralwertes $\int_0^\varepsilon (y_1 - y_2)^2 dx$. Ist k die

Krümmung von c in O , κ die Krümmung des Näherungskreises, so ergibt sich entsprechend den beiden Seiten $[0, \pm \varepsilon]$ von O die bewegungsinvariante Reihenentwicklung $\kappa = k \pm \frac{1}{18} k' \varepsilon + \frac{5}{84} k'' \varepsilon^2 \pm (\frac{1}{36} k^2 k' + \frac{1}{96} k''') \varepsilon^3 + \dots$, worin die Striche die Ableitungen nach der Bogenlänge bedeuten. Verf. macht davon Anwendungen für gewöhnliche Punkte, Scheitel und Wendepunkte und bespricht die Wahl von ε bei vorgegebenen Genauigkeitsforderungen, insbesondere das stückweise Zeichnen von Kurven mittels des Zirkels bei gegebener Strichbreite.

E. Kruppa (Wien).

Hristow, Wl. K.: Nachtrag zur Berechnung der Länge und der Richtungswinkel einer geodätischen Strecke. Z. Vermessungswes., Stuttg. **70**, 281—283 (1941).

In Z. Vermessungswes. **67**, 327—332 (1938) (dies. Zbl. **19**, 80) hat Verf. die Länge und die Richtungswinkel einer geodätischen Strecke aus den Koordinaten ihrer Endpunkte für eine beliebige Fläche und ein beliebiges isothermes Koordinatensystem berechnet. Die Koeffizienten der Gebrauchsformeln waren auf den Halbierungspunkt der geodätischen Strecke bezogen. In Analogie zu den sog. Gaußschen Mittelwertformeln werden die Gebrauchsformeln derart abgeändert, daß sich ihre Koeffizienten auf den Mittelpunkt beziehen, d. h. auf denjenigen Punkt, dessen Koordinaten gleich den arithmetischen Mittelwerten der Koordinaten der Endpunkte der geodätischen Strecke sind. Als Anwendung werden Länge und Richtungswinkel der geodätischen Strecke aus den Gauß-Krügerschen Koordinaten ihrer Endpunkte berechnet.

H. Schmehl (Potsdam).

Topologie:

● **Tukey, J. W.: Convergence and uniformity in topology.** Princeton: Univ. press 1940. IX, 90 pag. \$ 1.50.

Tutte, W. T., and C. A. B. Smith: On unicursal paths in a network of degree 4. Amer. Math. Monthly **48**, 233—237 (1941).

In einem System von n Punkten und Kanten, in welchem von jedem Punkt 4 nicht notwendig verschiedene Kanten ausgehen, werden letztere so gerichtet, daß bei jedem Punkt 2 Kanten weg- und 2 Kanten hinlaufen. Die Anzahl der geschlossenen Wege, die diesen Richtungen folgen, deren jeder sämtliche Kanten einmal durchläuft und jeden Punkt zweimal passiert, sei N . Dann bestimmt sich N aus einer leicht aufzustellenden n -reihigen Determinante, deren $(n - 1)$ -reihige Unterdeterminanten alle denselben Wert N haben.

Eberhard Melchior (Dresden).

Winn, C. E.: On the minimum number of polygons in an irreducible map. Amer. J. Math. **62**, 406—416 (1940).

Im Anschluß an eine frühere Note des Verf. und eine solche von P. Franklin (beide dies. Zbl. **18**, 333) wird die Minimalpolygonzahl einer irreduziblen Karte von 32 auf 36 erhöht. Sodann wird in verschiedener Weise die Anzahl der an ein Polygon grenzenden Fünfecke nach oben beschränkt: Ein Fünf- bzw. Sechseck ist reduzibel, wenn es von 4 bzw. 5 Polygonen mit je weniger als 7 Seiten umrandet wird, wofern Anfang und Ende dieses Polygonkranzes je ein Fünfeck ist. Ein Sechseck, das 2 getrennte Fünfeckspaare berührt, ist reduzibel, wenn beide Fünfeckspaare je an ein weiteres Fünfeck stoßen. Ein Siebeneck, dessen Polygonkranz aus 4 Fünf- und 3 Sechsecken irgendwie zusammengesetzt ist, ist reduzibel, desgleichen ein solches, dessen Kranz hintereinander ein Fünfeckspaar, ein Sechseck und dann wieder ein Fünfeckspaar enthält. Noch einige andere Reduktionen sind angegeben.

R. Furch.

Melchior, E.: Über Vielseite der projektiven Ebene. Deutsche Math. **5**, 461—475 (1941).

Ein Vielseit n -ter Ordnung ist die Gesamtheit von n Geraden der projektiven Ebene einschließlich der Schnittpunkte. In vorliegender Note werden die topologischen Flächenkomplexe betrachtet, welche aus der projektiven Ebene durch Auflegung dieser

Vielseite entstehen, unter Benutzung eines Satzes über Schachbrettfärbung der durch gerade Vielseite entstehenden Ebenenteilung bei Steinitz-Rademacher (im Zitat muß es heißen: „S. 211/2“). Um dem Problem der Klassifizierung dieser Komplexe näherzukommen, wird ihnen eine „Inzidenzzahl“ $I = 0$ zugeordnet (die nichts mit der Steinitz-Rademacherschen Inzidenzzahl zu tun hat), und es werden nur die Komplexe mit $I = 0$ betrachtet (die unter den Simplexteilungen der projektiven Ebene zu finden sind). Diese Vielseite lassen sich zu „Ketten“ zusammenstellen: die Nachbarn in einer Kette entstehen auseinander durch Zufügung bzw. Weglassung von je einer passenden Geraden. Die vom Verf. gefundenen Ketten werden ohne Anspruch auf Vollständigkeit wiedergegeben. — Die auf S. 470, Z. 3 v. o. gegebene Erklärung eines „Kernpunkt-systems“, das als System von Kernpunkten gedacht ist und die Kernpunkte auch für ungerade Vielseite definiert, muß so gefaßt werden, daß der Kernpunkt auch wirklich nur bezüglich eines gewissen Systems erklärt wird. An Beweis und Ergebnis ändert sich nichts.

R. Furch (Rostock).

Greitzer, S. L.: Combinatorial topology of polyhedra. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **19**, 260—288 (1940).

Ist \mathfrak{M} eine zweidimensionale, in Zellen zerlegte Mannigfaltigkeit und \mathfrak{B} ein Baum, der alle Punkte aus dem Schema von \mathfrak{M} enthält, so läßt sich diesem Schema mit Hilfe des Weges in \mathfrak{M} , der jede Strecke von \mathfrak{B} gerade zweimal durchläuft, ein sog. Monom zuordnen, d. i. eine gewisse zyklische Anordnung von Symbolen, die in vier Klassen zerfallen. Aus dem zugehörigen Monom läßt sich das Schema von \mathfrak{M} ablesen. Ferner lassen sich die der Abänderung von \mathfrak{B} entsprechenden Abänderungen des Monoms angeben.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Merz, Karl: Vielfache Kreuzhauben. (120. Jahresvers., Locarno, Sitzg. v. 28.—30. IX. 1940.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 112—113 (1940).

Für jede gerade Zahl n läßt sich, von einer $2n$ -seitigen Pyramide ausgehend, das Netz einer Kreuzhaube von der Zusammenhangszahl n gewinnen. Die Höhe der Pyramide wird n -fache „Wendestrecke“, wo Ober- und Unterseite des Netzes aneinanderstoßen.

Künneht (Erlangen).

Whitehead, J. H. C.: On C^1 -complexes. Ann. of Math., II. s. **41**, 809—824 (1940).

Eine Abbildung eines Gebietes des euklidischen R^k in den R^n gehört in die Klasse C^1 , wenn sie durch Gleichungen

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in kartesischen Koordinaten vermittelt wird, wobei die Funktionen f_i stetig und stetig differenzierbar sind und ihre Jacobi-Determinante den Höchststang k hat. Ein C^1 -Komplex ist das Bild $f(K)$ eines linearen Simplicialkomplexes bei einer Abbildung f der Klasse C^1 . Eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist eine solche, die sich durch endlich viele C^1 -Bilder von Simplexes überdecken läßt. Es wird nun gezeigt, daß sich jede C^1 -Mannigfaltigkeit triangulieren, also als $f(K)$ mit f aus C^1 darstellen läßt. K ist dann eine Mannigfaltigkeit im kombinatorischen Sinn und zwei verschiedene Triangulierungen sind kombinatorisch äquivalent. Zum Beweise dienen Sätze über die Approximation von C^1 -Abbildungen und insbesondere über die Vereinigung von C^1 -Teilkomplexen einer Mannigfaltigkeit.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 1—21 (1941).

Übersichtlicher Vortrag über den augenblicklichen Wissensstand hinsichtlich der topologischen, indikatrixerhaltenden Abbildungen der zweiseitigen Flächen auf sich. Insbesondere berichtet der Vortr. über seine eigenen, bislang veröffentlichten Beiträge zum Beweis des Brouwerschen Translationssatzes und des letzten geometrischen Theorems von Poincaré (unter besonderer Verwendung der Arbeiten und Gedanken von v. Kerékjártó) mit dem Ziel möglichst weitgehender gemeinsamer Behandlung der beiden Sätze.

R. Furch (Rostock).

Kaplan, Wilfred: Regular curve-families filling the plane. 2. Duke math. J. 8, 11—46 (1941).

Fortsetzung einer gleichnamigen Arbeit [Duke math. J. 7, 154—185 (1940); dies. Zbl. 24, 190]. Die Aufgabe dieser Fortsetzung ist die Charakterisierung aller Klassen regulärer, die Ebene überdeckender Kurvenfamilien; dabei werden 2 Familien als zur selben Klasse gehörig (äquivalent) definiert, wenn eine topologische Abbildung der Ebene auf sich existiert, welche die eine Familie in die andere überführt. Die Lösung besteht darin, daß jede Familie als ein System mit 2 Ordnungsrelationen angesehen werden kann; die Struktur dieses Systems ist charakteristisch für die Klasse.

Nöbeling (Erlangen).

Pontrjagin, L.: A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 331—359 (1941).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß sich zwei der im Titel gekennzeichneten Abbildungen ineinander deformieren lassen. Sie fußen auf dem Abbildungsgrad ω_0 und der Hopfschen Zahl ω_1 für Abbildungen einer dreidimensionalen Sphäre S^3 in eine zweidimensionale S^2 , die sich aus der Verschlingungszahl der Urbilder zweier Punkte der S^2 bestimmen läßt. Mit ihrer Hilfe werden der Abbildung f eines zweidimensionalen Komplexes K^2 auf S^2 ein V -Komplex $\omega_0(f, K^2)$ und zwei Abbildungen f, g eines Komplexes K^3 auf S^2 , die auf dem maximalen zweidimensionalen Teilkomplex K^2 übereinstimmen, ein V -Komplex $\omega_1(f, g, K^3)$ zugeordnet. Die angegebenen V -Komplexe sind V -Zyklen, wenn f eine Abbildung von K^3 auf S^2 ist und f, g auf K^2 übereinstimmen. Homotope Abbildungen lassen sich so deformieren, daß sie auf K^2 übereinstimmen. Notwendige und hinreichende Bedingung der Homotopie zweier auf K^2 übereinstimmender Abbildungen f, g ist, daß es einen eindimensionalen V -Zyklus x^1 gibt, für welchen $\omega_1(f, g, K^3)$ V -homolog zu dem vom Verf. erklärten Produkt $2x^1 \cdot \omega_0(f, K^2) = 2x^1 \cdot \omega_0(g, K^2)$ ist. K. Reidemeister.

Hopf, Heinz: Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. Ann. of Math., II. s. 42, 22—52 (1941).

In einer früheren Note des Verf. (siehe das ausführliche Ref. in dies. Zbl. 21, 67) wurde ein bedeutungsvoller Satz über die Struktur des Homologierings der Γ -Mannigfaltigkeiten (auf denen eine nichttriviale Multiplikation erklärbar ist) ausgesprochen. Hier folgt der Beweis. Neben eindrucksvoller Vereinigung und Verallgemeinerung von Ergebnissen anderer Autoren über Gruppenmannigfaltigkeiten folgt aus dem Satz eine Reihe neuer Resultate, z. B.: Jedes homogen dimensionale Element des Homologierings, für welches die „duale Dimension“ $\delta (= n - d, d = \text{Dimension des Elements}, n = \text{Dimension der Mannigfaltigkeit})$ gerade und positiv ist, läßt sich durch Multiplikation und Addition aus höherdimensionalen Elementen erzeugen (was auch bedeutungsvoll ist, wenn es in die Sprache der invarianten Differentialformen übersetzt wird). Als fruchtbarer Begriff erweist sich hierbei der des „maximalen“ Elements (welches nicht durch Addition und Multiplikation aus höherdimensionalen Elementen erzeugt werden kann). Die Dualdimension eines solchen Elements ist ungerade. Als wesentliche Verallgemeinerung der Tatsache, daß eine Sphäre gerader Dimension keine Gruppenmannigfaltigkeit sein kann, folgt: In den Γ -Mannigfaltigkeiten sind die stetigen Bilder von Sphären gerader Dimension immer homolog null. R. Furch (Rostock).

Whitehead, J. H. C.: On the homotopy type of manifolds. Ann. of Math., II. s. 41, 825—832 (1940).

Die Arbeit ist ein Beitrag zur Frage, ob geschlossene Mannigfaltigkeiten desselben Homotopietyps homöomorph sind. Für eine gewisse Klasse Π von Mannigfaltigkeiten wird gezeigt: Sind M_1 und M_2 simpliziale Zerlegungen homotoper Mannigfaltigkeiten (genauer: solcher mit demselben Nukleus), so sind die Verbindungsprodukte von M_1, M_2 mit einem Simplex A^k kombinatorisch äquivalent, wenn k genügend groß ist. Zu Π gehört M , wenn es eine C^1 -Mannigfaltigkeit (eine „glatte“) ist und wenn ferner

die regulären Umgebungskomplexe eines zu M homöomorphen linearen Simplicialkomplexes K in einem R^n das Verbindungsprodukt von K und einem Simplex ist. Beispielsweise gehören zu Π die orientierbaren M^2 sowie die M^3 , soweit sie C^1 -Mannigfaltigkeiten sind, ferner die Lieschen Gruppenräume sowie die regulär in den R^{n+1} oder R^{n+2} eingebetteten M^n .

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Bachiller, T. R.: Bemerkungen zur Algebra und Topologie. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 1, 68—74 (1941) [Spanisch].

Beweis des folgenden Satzes: E_1, E_2 seien zwei metrische, separable, zusammenhängende, lokal kontrahierbare Räume, $E_1 \cdot E_2 = E$ ihr topologisches Produkt. Dann ist die n -te Homotopiegruppe von E direkte Summe der entsprechenden Gruppen von E_1 und E_2 . Der Satz verallgemeinert ein bekanntes Theorem über Komplexe (vgl. Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, 1934, 156; dies. Zbl. 9, 86).

Harald Geppert (Berlin).

Kolmogoroff, A.: Points of local topologicity of enumerably folded open mappings of compacts. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30, 479—481 (1941).

Die eindeutige, stetige Abbildung f des Kompaktums X auf das Kompaktum Y sei offen (d. h. das Bild jeder offenen Teilmenge von X ist offen in Y) und abzählbar oft gefaltet (d. h. die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ jedes Punktes y von Y ist höchstens abzählbar). f heiße in einem Punkt x von X lokal topologisch, wenn eine Umgebung U von x existiert, auf welcher f topologisch ist. Verf. beweist: die Menge T_f der Punkte von X , in welchen f lokal topologisch ist, ist dicht in X .

Nöbeling (Erlangen).

Martin, Venable: Monotone transformations of non compact two-dimensional manifolds. Duke math. J. 8, 136—153 (1941).

Die Ergebnisse von J. H. Roberts und N. E. Steenrod [Ann. of Math., II. s. 39, 851—862 (1938); dies. Zbl. 19, 372] werden verallgemeinert für den Fall, daß nicht die (2-dimensionale Urbild-) Mannigfaltigkeit, sondern nur das (zusammenhängende) Urbild jedes Punktes des Bildraumes kompakt sei. Es wird auch in diesem Fall eine vollständige Charakterisierung der Bildräume gegeben. Weiter wird noch der Fall untersucht, daß auch die genannten Urbildmengen nicht mehr kompakt sind, daß aber die Mannigfaltigkeit eine endliche, 1-dimensionale Bettische Zahl hat und der Bildraum metrisch ist. Die angegebene Struktur des Bildraumes wird in diesem Fall jedoch nur als notwendig nachgewiesen.

Nöbeling (Erlangen).

Schweigert, G. E.: A note on the limit of orbits. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 963—969 (1940).

Die Note schließt an eine frühere von D. W. Hall und dem Verf. an (dies. Zbl. 20, 79, siehe dortige Bezeichnung): Bei punktweise periodischen, eindeutig stetigen Selbstabbildungen T eines kompakt metrischen Raumes M werden wieder konvergente Folgen $\{G_k\}$ von „Punktzyklen“ (point-orbits) G_k betrachtet, deren Grenzmenge L sei. Dann ist L der „Komponentenzyklus“ einer beliebigen Komponente X von L , der unter mehrfacher Einwirkung von T aus X entsteht. Ein solcher Komponentenzyklus entsteht als Grenzmenge auch dann, wenn die G_k selbst abgeschlossene Komponentenzyklen sind. — Diese Theorie führt zur negativen Entscheidung in einem Erweiterungsproblem: Die Teilmenge K liege überall dicht in M ; T_0 sei eine topologische Selbstabbildung von K und punktweise periodisch; ist eine Erweiterung der T_0 von K auf M ebenfalls punktweise periodisch?

R. Furch (Rostock).

Choquet, Gustave: Points invariants et structure des continus. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 376—379 (1941).

Zahlreiche Sätze über die Existenz von Fixpunkten und die Struktur der Menge aller Fixpunkte spezieller und recht allgemeiner Klassen von ebenen Kontinuen bei topologischen und eindeutigen, stetigen Abbildungen. Keine Beweise.

Nöbeling (Erlangen).

Fan, Ky: Sur les types homogènes de dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 175—177 (1940).

Es seien R und S zwei metrische Räume, $a \in R$ und $b \in S$ zwei Punkte. Nach Fréchet (Les espaces abstraits, Paris 1928) sagt man, daß der lokale Dimensionstyp von R in a höchstens gleich dem von S in b ist ($d_a R \leq d_b S$), wenn für jede Umgebung U_b von b in S eine Umgebung U_a von a in R existiert, welche zu einer Teilmenge von U_b homöomorph ist. Ein Raum R heißt homogen, wenn $d_a R = d_b R$ für je zwei Punkte $a, b \in R$ gilt. Sind R und S homogen, so sagt Verf., daß der homogene Dimensionstypus von R höchstens gleich dem von S ist ($\delta R \leq \delta S$), wenn $d_a R \leq d_b S$ für irgend zwei Punkte $a \in R, b \in S$ gilt. Verf. vergleicht diesen Begriff mit dem Dimensionstypus von Fréchet (l. c.) und gibt einige Sätze an. Keine Beweise. *Nöbeling*.

Morita, Kiiti: On uniform spaces and the dimension of compact spaces. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **22**, 969—977 (1940).

Es sei \mathcal{G} eine endliche Überdeckung eines Raumes S durch offene Mengen G_1, \dots, G_m und $V_{\mathcal{G}}$ die Menge $\sum_{i=1}^m (G_i \times G_i)$ des topologischen Produktes $S \times S$. Liefert die Familie $\{V_{\mathcal{G}}\}$, wobei \mathcal{G} alle endlichen Überdeckungen durchläuft, eine zur Topologie von S äquivalente uniforme Topologie im Sinne von A. Weil (Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actualités scient. et industr., Paris 1937, dies. Zbl. **19**, 186) so sagt Verf., S habe die Eigenschaft (E). Nach A. Weil hat jeder bikompakte Hausdorffsche Raum die Eigenschaft (E), kann also insbesondere als uniformer Raum aufgefaßt werden. Verf. zeigt, daß (E) für die normalen topologischen Räume charakteristisch ist. Weiter überträgt Verf. einige bekannte Sätze der mengentheoretischen Dimensionstheorie kompakter metrischer Räume, in denen die Metrik eine wesentliche Rolle spielt [z. B. den bekannten Satz von P. Alexandroff über die ε -Abbildungen auf gleich- bzw. niedrigerdimensionale Polyeder; Math. Ann. **98**, 617—636 (1928)], auf bikompakte Hausdorffsche Räume, wobei an die Stelle der Metrik die uniforme Topologie tritt. (Die Dimension wird hierbei in bekannter Weise durch die endlichen Überdeckungen definiert). Schließlich überträgt Verf. auf kompakte normale Räume den Satz, nach welchem die Dimension eines kompakten metrischen Raumes gleich der größten Zahl r ist, für welche eine wesentliche Abbildung auf ein r -dimensionales Simplex existiert. *Nöbeling* (Erlangen).

Šura-Bura, M.: Zur Theorie der bikompakten Räume. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 385—387 u. dtsch. Zusammenfassung 388 (1941) [Russisch].

Wiederholung der deutschen Inhaltsangabe: Satz 1. Es sei R ein Bikompaktum (bikompakter Hausdorffscher Raum), p ein Punkt von R , K der Durchschnitt aller p enthaltenden, gleichzeitig abgeschlossenen und offenen Punktmengen des Raumes R ; dann ist K die Komponente von p in R . 2. Es sei F eine abgeschlossene Menge des Hausdorffschen Raumes R , $G = R - F$, H die gemeinsame Begrenzung von F und G , C ein zu H nicht fremdes, zusammenhängendes Bikompaktum $\subset R$; dann gilt: a) jede Komponente von $C \cdot F$ hat mit H einen nichtleeren Durchschnitt; b) falls $C \cdot G$ nicht-leer ist, hat H einen nichtleeren Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle jeder Komponente von $C \cdot G$; c) falls der offene Kern $I(F)$ von F zu C nicht fremd ist, so ist H nicht fremd zu der abgeschlossenen Hülle jeder Komponente von $C \cdot I(F)$. 3. Ein zusammenhängendes Bikompaktum kann nicht als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen, paarweise fremden, abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen dargestellt werden. *Nöbeling* (Erlangen).

Lubben, R. G.: Concerning the decomposition and amalgamation of points, upper semi-continuous collections, and topological extensions. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 410—466 (1941).

Bei der Erweiterung eines Hausdorffschen Raumes R zu einem Oberraum mit dieser oder jener speziellen Eigenschaft definiert man bekanntlich die zu R hinzuzu-

fügenden Punkte oft als gewisse Systeme von Teilmengen von R (z. B. als monoton fallende Folgen abgeschlossener Mengen mit leerem Durchschnitt bei der Erweiterung zu einem bikompakten Oberraum). Verf. entwickelt eine einheitliche Theorie solcher neuer Punkte verschiedener Art, die als Systeme von Teilmengen von R mit gewissen Eigenschaften definiert sind. Hierbei ergeben sich teils Verallgemeinerungen, teils Analogien zu Begriffsbildungen von C. Caratheodory [Math. Ann. **73**, 323—370 (1913)], H. Cartan [C. R. Acad. Sci., Paris **205**, 595—598, 777—779 (1937); dies. Zbl. **17**, 243 u. **18**, 3], E. Čech [Ann. of Math., II. s. **38**, 823—844 (1937); dies. Zbl. **17**, 428], M. H. Stone [Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375—481 (1937); dies. Zbl. **17**, 135], H. Wallmann [Ann. of Math., II. s. **39**, 112—126 (1938); dies. Zbl. **18**, 332], deren einschlägige Fragestellungen hier weitgehend unter einheitlichem Gesichtspunkt behandelt werden. Weiter gibt Verf. eine Reihe von Kennzeichnungen verschiedener Typen von regulären und normalen Räumen mit Hilfe der „regulären Kompositionspunkte“ und Verallgemeinerungen von Sätzen aus der Theorie der oberhalbstetigen Zerlegungen (Alexandroff-Hopf, Topologie I, Berlin 1935; dies. Zbl. **13**, 79). — Für Einzelheiten muß auf die inhaltsreiche Arbeit selbst verwiesen werden. *Nöbeling*.

Chogoshvili, George: Über Konvergenzräume. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 377—381 u. dtsh. Zusammenfassung 382—383 (1941) [Russisch].

Auf Grund des Begriffes der teilweise geordneten Mengensysteme werden Bedingungen angegeben, welche die Übertragung der in Umgebungsräumen üblichen Trennungssaxiome auf Konvergenzräume (das sind Räume, in welchen die Konvergenz durch gewisse Axiome definiert ist) ermöglichen. (Referat nach dem Auszug.) *G. Alexits*.

Fan, Ky: Espaces quasi réguliers, quasi normaux et quasi distanciés. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 348—351 (1940).

Verf. nennt einen Raum (V) im Sinne von Fréchet (Les espaces abstraits, Paris 1928) quasi-accessible, wenn in ihm $\overline{E + F} = \overline{E} + \overline{F}$ und $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ gilt. Er heißt quasi-regulär bzw. quasi-normal, wenn außerdem das Trennungssaxiom T_2 bzw. T_3 gilt (vgl. Fréchet, l. c.). Ein Raum (V) heißt symmetrisch, wenn für je zwei Punkte a, b aus $b \subset (\overline{a})$ folgt $a \subset (\overline{b})$. Ein quasi-metrischer Raum wird wie ein metrischer Raum definiert, wobei jedoch aus $\delta(a, b)$ nur $a \subset (\overline{b})$ und $b \subset (\overline{a})$, nicht unbedingt $a = b$ zu folgen braucht. Verf. gibt (ohne Beweise) Verallgemeinerungen bekannter Sätze auf diese allgemeineren Räume an. *Nöbeling* (Erlangen).

Price, G. Baley: A generalization of a metric space with applications to spaces whose elements are sets. Amer. J. Math. **63**, 46—56 (1941).

\mathfrak{D} sei ein partiell geordneter Raum, dessen Elemente eine Addition gestatten. Aus $d_1 < e_1$, $d_2 \leq e_2$ folge $d_1 + d_2 < e_1 + e_2$. \mathfrak{E} sei eine Teilmenge von \mathfrak{D} mit folgenden Eigenschaften: I) zu jedem $e_0 \in \mathfrak{E}$ existieren e_1, e_2 in \mathfrak{E} mit $e_1 + e_2 \leq e_0$; II) zu jedem $e_0 \in \mathfrak{E}$, $d \in \mathfrak{D}$, $d < e_0$ existiert ein $e \in \mathfrak{E}$ mit $d + e \leq e_0$; III) zu irgend zwei Elementen e_1, e_2 in \mathfrak{E} existiert ein $e \in \mathfrak{E}$ mit $e \leq e_1, e \leq e_2$. Sei nun K eine Menge von Elementen x, y, \dots , $d(x, y)$ sei eine auf K erklärte Funktion mit Werten in \mathfrak{D} mit den Eigenschaften: 1) $d(x, x) < e$ für jedes $e \in \mathfrak{E}$, $x \in K$, 2) aus $d(x, y) < e$ für jedes e folgt $x = y$, 3) $d(x, y) = d(y, x)$, 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Nennt man alle x mit $d(x, x_0) < e_0$ eine Umgebung von x_0 , so wird K ein regulärer Hausdorffscher Raum. Existiert eine abzählbare Folge e_i in \mathfrak{E} , so daß für jedes e in \mathfrak{E} ein $e_k \leq e$ existiert, so ist K metrisierbar. Die partiell geordneten Räume von Kantorovitsch fallen unter die hier besprochenen, wenn $d(x, y) = |x - y|$ gesetzt wird, wobei $|x - y|$ der absolute Betrag im Sinne der Definition bei Kantorovitsch [Rec. math. Moscou, N. s. **2**, 121—165 (1937); dies. Zbl. **16**, 405] ist. Weitere Beispiele, in denen K ein Mengenkörper ist und $d(x, y)$ gleich der symmetrischen Differenz der Mengen gesetzt wird. *G. Köthe* (Gießen).